А.В. Гласко

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

МОДУЛЬ 2

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
2013

Лекция 8

§1. Понятие производной.

Рассмотрим функцию y=f(x), определенную в некоторой окрестности точки x_0. Пусть x – некоторая точка из этой окрестности. Обозначим, как обычно, через Δx приращение аргумента:

$\Delta x = x - x_0$,

а через Δy – соответствующее приращение функции (рис. 1):

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

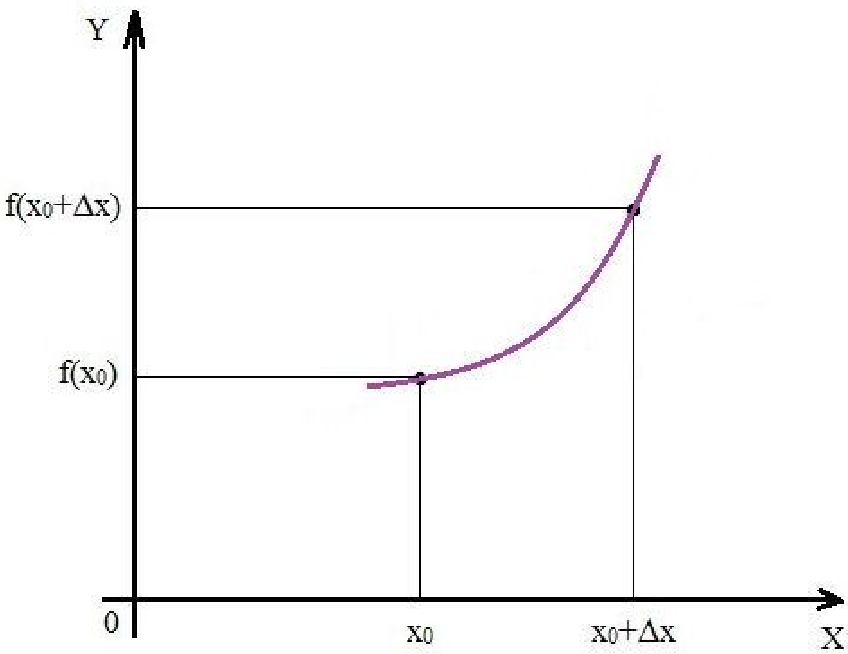


Рис. 1. Приращение аргумента и приращение функции.

Опр. *Производной функции* $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, при стремлении последнего к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty,$$

говорят что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную:

$$f'(x_0) = \infty.$$

Если говорят, что функция имеет производную в точке x_0, обычно (если не оговорено обратное) подразумевают, что эта производная конечна.

Производная функции в точке есть число. Однако, если производная функции $f(x)$ существует в любой точке некоторого интервала (в частности, на R), она определяет некоторую новую функцию $R \to R$ $\varphi(x) = f'(x)$. Нахождение производной заданной функции называется *дифференцированием*.

Примеры.

1. Найдем производную функции $y = e^x$. Выбрав любую точку $x \in R$ и обозначив через Δx и Δy приращения аргумента и функции в этой точке, имеем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x,$$

в силу следствия второго замечательного предела $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$, или соответствующего отношения эквивалентности: $e^t-1\sim t$ при $t\to 0$. Таким образом, производная экспоненты равна экспоненте.

2. Найдем производную функции $y=\ln x$.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{x\Delta x}=\frac{1}{x}.$$

Здесь использовано отношение эквивалентности $\ln(1+t)\sim t$ при $t\to 0$.

2. Найдем производную функции $y=\sin x$.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$$

.

Таким образом, производная синуса равна косинусу. Эта производная также определена на R. Аналогичным образом можно показать, что $(\cos x)'=-\sin x$. Рекомендуется сделать это в качестве упражнения.

Поскольку функция $f(x)$, в общем случае, может быть определена только в право- или левосторонней окрестности точки x_0, целесообразно ввести понятие односторонних производных.

Опр. *Правосторонней производной* функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, при стремлении последнего к нулю справа:

$$f'(x_0+)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Опр. *Левосторонней производной* функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, при стремлении последнего к нулю слева:

$$f'(x_0-)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Основываясь на теореме о связи односторонних пределов с двусторонним, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную двустороннюю производную тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке обе конечных односторонних производных и они равны. При этом двусторонняя производная равна односторонним.

§2. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к графику функции.

Выясним геометрический смысл производной $f'(x_0)$. Пусть $y_0=f(x_0)$, а $y=f(x)=f(x_0+\Delta x)$. Построим секущую MN к графику функции $f(x)$ в точке $M(x_0,y_0)$ – рис. 2.

По мере убывания абсолютной величины Δx (на рис. 2 Δx положительна), точка N движется вдоль графика функции по направлению к точке M, а прямая MN поворачивается вокруг точки M. В пределе $\Delta x\to 0$ точки M и N сольются в одну точку, так что прямая будет иметь единственную общую точку с графиком.

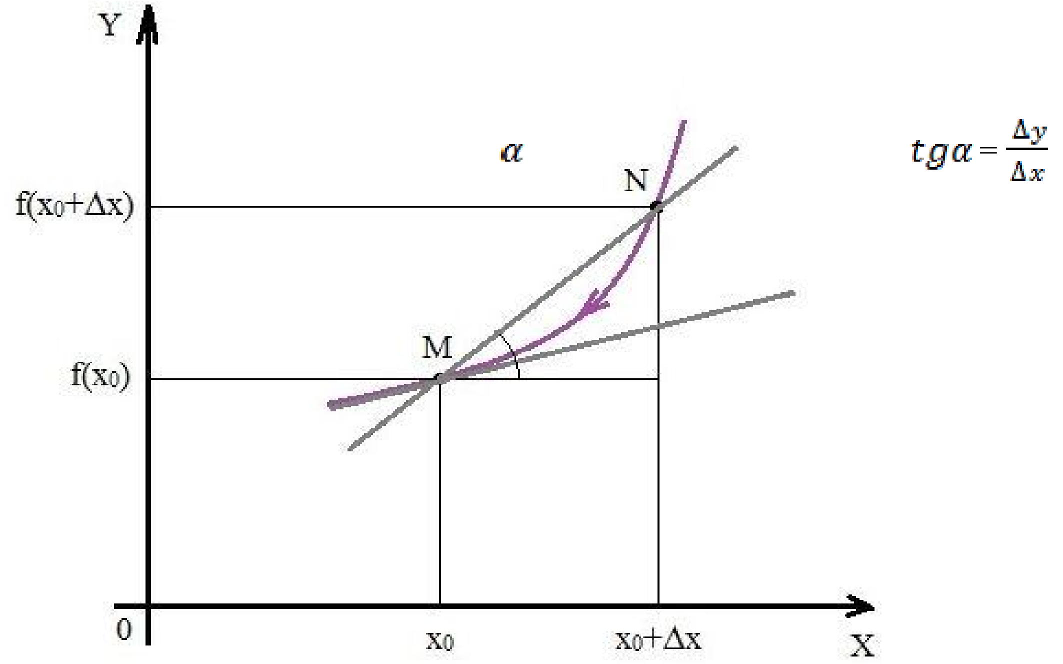


Рис. 2. Геометрический смысл производной.

Опр. Предельное положение секущей *MN* графика функции *f*(*x*), при стремлении точки *N* к точке *M* вдоль графика называется *касательной* к графику в точке *M*.

Очевидно, что тангенс угла между секущей MN и положительным направлением оси Ox равен

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Перейдем в обеих частях этого равенства к пределу при $\Delta x \to 0$. Поскольку секущая в этом пределе превращается в касательную, то $tg\alpha \to tg\alpha_0$, где α_0 а – угол между касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 и положительным направлением оси Ox. Отношение же $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к производной $f'(x_0)$. Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла между касательной к графику данной функции в этой точке и положительным направлением оси абсцисс:

$$f'(x_0) = tg\alpha_0.$$

Вспомним, что уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$, может быть записано в виде

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0).$$

Постоянная k называется *угловым коэффициентом* прямой. Угловой коэффициент равен тангенсу угла между данной прямой и положительным направлением оси абсцисс: $k = tg\alpha$. В частности, для того чтобы поучить уравнение касательной, выберем на ней произвольную точку $P(x; y)$. Из прямоугольного треугольника MQP на рис. 3 видим, что

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = tg\alpha_0 = f'(x_0),$$

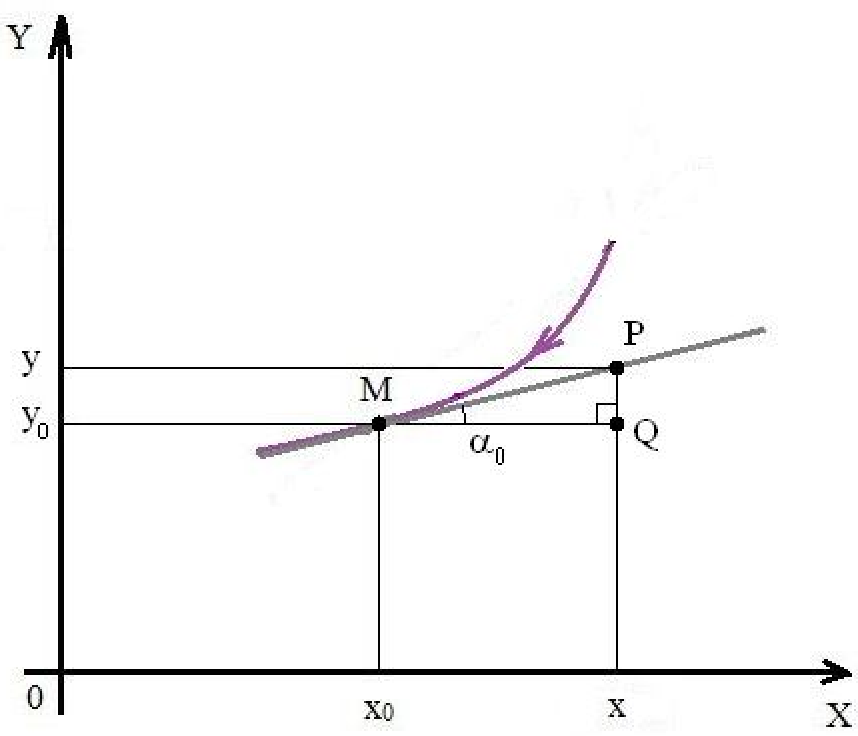


Рис. 3. Вывод уравнения касательной.

или

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Это и есть уравнение касательной к графику функции в точке $M(x_0; y_0)$.

Теперь мы можем окончательно сформулировать *геометрический смысл производной* функции в точке: производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику данной функции в этой точке по отношению к положительному направлению оси абсцисс, или, что то же самое, – угловому коэффициенту касательной:

$$f'(x_0) = tg\alpha_0 = k.$$

Опр. *Нормалью* к графику функции f(x) в точке x_0 называется прямая, перпендикулярная касательной к графику в этой точке.

Из школьного курса известно, что угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны равенством $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$. Поэтому уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Отметим, что график функции необязательно имеет касательную в любой точке. Так на рис. 4, очевидно не существует касательной к графику в точке (с абсциссой) x_0.

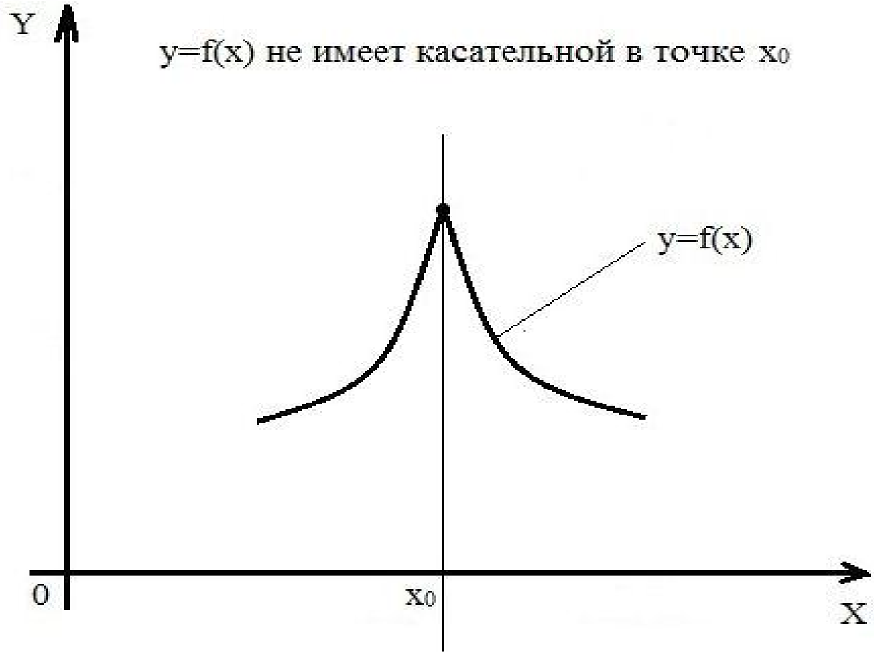


Рис. 4. Пример не гладкой кривой.

Опр. Кривая, имеющая касательную в любой точке (из рассматриваемого промежутка), называется *гладкой* (на этом промежутке).

Из геометрического смысла производной, очевидно, что если функция имеет конечную производную в любой точке интервала (a,b), то ее график является гладким на этом интервале. Обратное утверждение неверно. Так на рис. 5 приведен график функции, не имеющей конечной производной в точке x_0, но тем не менее имеющий касательную в этой точке, а значит – гладкий.

Геометрический смысл бесконечной производной состоит в следующем: если производная $f'(x_0)=\infty$, то касательная к графику функции f(x) в точке x_0 параллельна оси Oy и описывается уравнением $x=x_0$ (рис. 5)

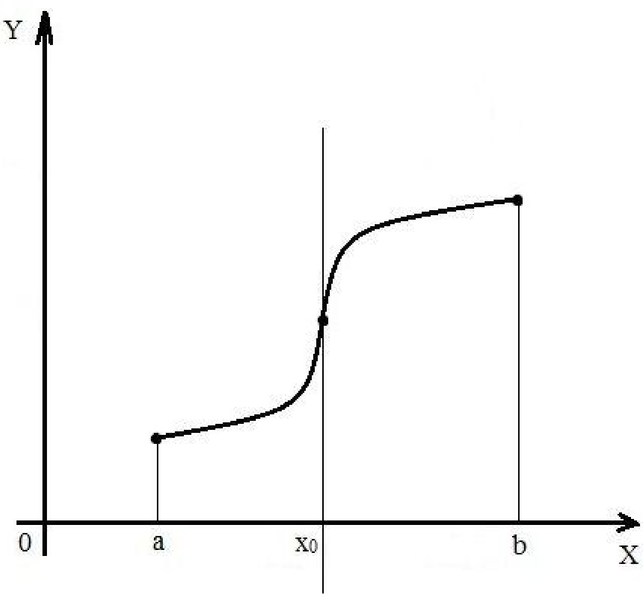


Рис. 5.
Геометрический смысл бесконечной производной.

§3. Механический смысл производной.

Рассмотрим материальную точку, движущуюся прямолинейно и *равномерно* вдоль оси Ox (рис. 6).

Рис. 6. Механический смысл производной.

Пусть в момент времени t материальная точка занимает положение x и за время Δt совершает перемещение Δx.
Как известно, скоростью движения такой материальной точки называется отношение

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Обобщим понятие скорости на случай *неравномерного* движения. В этом случае отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ будет зависеть от величины Δt. Введем понятие средней скорости движения точки за промежуток времени Δt:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

и определим скорость движения в момент времени t, как предел средней скорости при $\Delta t \to 0$.

Опр. Мгновенной *скоростью движения* материальной точки в момент времени t называется предел отношения перемещения этой точки Δx за промежуток времени Δt к этому промежутку времени при стремлении последнего к нулю:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

В соответствии с определением производной, последнее означает, что скорость движения материальной точке равна производной перемещения этой точки, как функции времени:

$$v(t) = x'(t).$$

В этом и состоит *механический смысл производной*.

Общий *физический смысл производной* состоит в следующем. Если $x(t)$ – некоторая характеристика физической системы (температура, концентрация вещества и пр.), то скорость изменения этой характеристики с течением времени равна

$$v(t) = x'(t).$$

Аналогичным образом определяется скорость изменения характеристик объектов (систем) любой природы (химических, геологических, астрономических, психических, социальных, экономических и пр.), т.е. скорость протекания любых процессов. Например, скорость роста (изменения) численности населения равна производной этой численности по времени.

§4. Дифференцируемость функции в точке.

Опр. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если существует такая постоянная A, что приращение функции в этой точке при $\Delta x \to 0$ представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Отметим, что величина A называется постоянной в том смысле, что она не зависит от Δx. В то же время, она, вообще говоря, зависит от x_0.

Теорема. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную. При этом $A = f'(x_0)$.

Доказательство. Покажем сначала, что если функция дифференцируема в точке x_0, то она имеет в этой точке конечную производную, причем $f'(x_0) = A$. Для этого разделим обе части равенства

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

на Δx. Имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в обеих частях равенства и учитывая, что, по определению б.м. высшего порядка малости,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

получим:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что если функция имеет в точке x_0 конечную производную, то она дифференцируема в этой точке, причем $A = f'(x_0)$. Действительно, поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

по теореме о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м. при $\Delta x \to 0$. Умножив обе части равенства на Δx, получим

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Очевидно, что второе слагаемое в правой части имеет высший порядок малости по сравнению с Δx при $\Delta x \to 0$: $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$. Действительно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Таким образом, справедлива формула

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

где $A = f'(x_0)$.

Теорема доказана.

С учетом доказанной теоремы, формула, выражающая определение дифференцируемости функции в точке, может быть записана в виде:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Теорема (о связи между дифференцируемостью и непрерывностью функции). Если функция дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Из определения дифференцируемости:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

очевидно, что при $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$, но это и означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Теорема доказана.

Замечание. Обратное не верно: из непрерывности функции не следует ее дифференцируемость.

Пример. Функция, график которой представлен на рис. 4 является непрерывной в точке x_0, но не является дифференцируемой в этой точке (не имеет в ней производной).

§5. Правила дифференцирования.

Теорема. Производная постоянной равна нулю: $C'=0$.

Доказательство. Действительно, для функции $y=C=const$ приращение в любой точке равно $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$. Поэтому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$ и $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$.

Теорема доказана.

Теорема. Пусть существуют производные функций $u(x)$ и $v(x)$ в точке x_0. Тогда существует также производная суммы этих функций $y=u(x)+v(x)$ в точке x_0 и она равна сумме производных:

$$y'(x_0)=u'(x_0)+v'(x_0).$$

Доказательство. Приращение функции $y(x)$ равно

$$\Delta y=y(x_0+\Delta x)-y(x_0)=u(x_0+\Delta x)+v(x_0+\Delta x)-(u(x_0)+v(x_0))=\Delta u+\Delta v.$$

Поэтому

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x_0)+v'(x_0).$$

Переход от предела суммы к сумме пределов осуществлен на том основании, что последние по условию теоремы существуют.

Теорема доказана.

Теорема. Пусть существуют производные функций $u(x)$ и $v(x)$ в точке x_0. Тогда существует также производная произведения этих функций $y=u(x)v(x)$ в точке x_0 и она равна

$$y'(x_0)=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0).$$

Доказательство. По определению приращения функции,

$$\Delta u=u(x_0+\Delta x)-u(x_0),\ \Delta v=v(x_0+\Delta x)-v(x_0).$$

Следовательно,

$$u(x_0+\Delta x)=u(x_0)+\Delta u,\ v(x_0+\Delta x)=v(x_0)+\Delta v.$$

Приращение функции $y(x)$ равно

$$\Delta y=y(x_0+\Delta x)-y(x_0)=u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x)-u(x_0)v(x_0)=(u(x_0)+\Delta u)(v(x_0)+\Delta v)-u(x_0)v(x_0)=$$
$$=(u(x_0)+\Delta u)(v(x_0)+\Delta v)-u(x_0)v(x_0)=u(x_0)\Delta v+v(x_0)\Delta u+\Delta u\Delta v.$$

Поэтому

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0)\Delta v+v(x_0)\Delta u+\Delta u\Delta v}{\Delta x}=u(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v=$$
$$=u(x_0)v'(x_0)+v(x_0)u'(x_0).$$

Переход от предела суммы к сумме пределов осуществлен на том основании, что последние по условию теоремы существуют. Предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=u'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0,$$

поскольку функция $v(x)$ дифференцируема, а следовательно непрерывна в точке x_0.

Теорема доказана.

Следствие. Постоянную можно выносить за знак производной:

$(Cy)' = Cy'$.

Действительно,

$(Cy)' = C'y + Cy' = Cy'$,

т.к. производная постоянной C равна нулю.

Теорема. Пусть существуют производные функций $u(x)$ и $v(x)$ в точке x_0. Причем $v(x_0) \neq 0$. Тогда существует также производная отношения этих функций $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ в точке x_0 и она равна:

$$y'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Эта теорема доказывается аналогично предыдущей. Рекомендуется доказать ее в качестве упражнения.

Пример. Найдем производную функции $y = tgx$. Поскольку $(\sin x)' = \cos x$, а $(\cos x)' = -\sin x$ (см. предыдущую лекцию), то

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Подобным образом можно найти производную функции $y = ctgx$. Сделайте это самостоятельно, в качестве упражнения.

Следствие. Производная функции $y = \dfrac{1}{v(x)}$ равна $y' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Действительно, эту формулу получим, выбрав в формуле дифференцирования частного $u(x) \equiv 1$.

Итак, мы получили следующий набор правил дифференцирования:

1. $C' = 0$

2. $(u+v)' = u' + v'$

3. $(uv)' = u'v + uv'$

4. $(Cu)' = Cu'$

5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

6. $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$,

которые будут постоянно использоваться при дифференцировании функций.

§6. Производная обратной функции.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$ и пусть существует конечная производная $f'(x_0) \neq 0$. Тогда существует также конечная производная $\varphi'(y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, причем

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. По определению производной,

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x}.$$

Т.к. функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 то она непрерывна в этой точке, а значит, при $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$. Однако, из этого не следует, что при $\Delta y \to 0$ обязательно $\Delta x \to 0$. Но, как мы знаем, функция обратная к непрерывной в точке x_0 непрерывна в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$. В силу непрерывности функции $x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$, при $\Delta y \to 0$ $\Delta x \to 0$. Таким образом,

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема доказана.

Итак, мы получили формулу, выражающую связь производных прямой и обратной функций *в точке*, т.е. связь двух чисел. Чтобы обобщить эту формулу на связь между *функциями* $f'(x)$ и $\varphi'(y)$, нужно, чтобы в правой части равенства стояла функция той же переменной, что и влевой, т.е. нужно учесть зависимость $x(y)$:

$$\varphi'(y) = \left. \frac{1}{f'(x)} \right|_{x=\varphi(y)}.$$

Т.е. для того, чтобы найти производную обратной функции, нужно найти производную прямой функции, разделить единицу на получившееся выражение и ввести замену $x = \varphi(y)$.

Пример. Найдем производную функции $y = \arcsin x$. Эта функция является обратной к функции $x = \sin y$, производная которой равна (см. предыдущую лекцию)

$x' = \cos y$.

По формуле дифференцирования обратной функции, имеем:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Знак «+» перед корнем выбран потому, что область значений функции $y = \arcsin x$ (рис. 7): $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а на этом отрезке $\cos y \geq 0$.

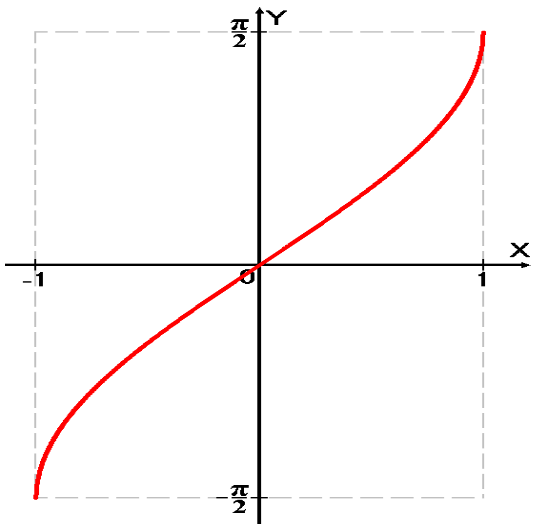


Рис. 7. График функции $y = \arcsin x$.

§7. Производная сложной функции.

Теорема. Пусть функция $v(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $u(v)$ – в точке $v_0 = v(x_0)$, тогда сложная функция $y = u(v(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем ее производная равна

$$y'(x_0) = u'(v_0)v'(x_0).$$

Доказательство. Т.к. функция $v(x)$ дифференцируема в точке x_0, ее приращение представимо в виде

$$\Delta v = v'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Т.к. функция $u(v)$ дифференцируема в точке v_0, ее приращение представимо в виде

$$\Delta u = u'(v_0)\Delta v + o(\Delta v).$$

Приращение сложной функции, соответствующее приращению аргумента Δx, очевидно, равно приращению внешней функции. Таким образом,

$$\Delta y = u'(v_0)[v'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)] + o(\Delta v) = u'(v_0)v'(x_0)\Delta x + u'(v_0)o(\Delta x) + o(\Delta v).$$

Из выражения приращения Δv очевидно, что при $\Delta x \to 0$ Δv имеет либо тот же порядок малости, что и Δx, либо высший порядок малости (если $v'(x_0) = 0$). В обоих случаях, $o(\Delta v) = o(\Delta x)$. Таким образом,

$$u'(v_0)o(\Delta x) + o(\Delta v) = o(\Delta x).$$

Имеем

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u'(v_0)v'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = u'(v_0)v'(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = u'(v_0)v'(x_0).$$

Теорема доказана.

Итак, *производная сложной функции равна произведению производной внешней функции по промежуточной переменной на производную внутренней функции по независимой переменной* (при условии, что две последние существуют):

$$y' = u'(v)v'(x).$$

Примеры.

1. Найдем производную степенной функции $y = x^\alpha$ ($x > 0$). Представим эту функцию в виде $y = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$. Мы получили сложную функцию, причем внутренняя функция – $v = \alpha \ln x$, а внешняя – $u = e^v$. По формуле дифференцирования сложной функции, имеем:

$$y' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{x}e^{\ln x^\alpha} = \frac{\alpha}{x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

2. Найдем производную функции $y = \sin x^2$. Это сложная функция, причем внутренняя функция $v = x^2$, а внешняя: $u = \sin v$. Соответственно, производная внутренней функции равна $v' = 2x$, а внешней – $u' = \cos v$. Поэтому

$$y' = 2x\cos x^2.$$

3. Найдем производную функции $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$. Здесь, наоборот, внутренняя функция $v = \sin x$, а внешняя – $u = v^2$. Поэтому

$$y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

В случае, если функция имеет несколько уровней сложности, полученная формула применяется в несколько этапов.

Пример. Найдем производную функции $y = e^{\sin x^2}$.

$$y' = e^{\sin x^2}(\sin x^2)' = e^{\sin x^2}\cos x^2 (x^2)' = 2xe^{\sin x^2}\cos x^2.$$

Конечно, при решении практических задач, ответ следует писать сразу, но здесь мы даем подробные разъяснения каждого действия, с целью избегания недопонимания.

Используя формулу для производной экспоненты и формулу дифференцирования сложной функции, не трудно получить также формулу для производной показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$):

$$y' = a^x \ln a .$$

Рекомендуется проделать это самостоятельно, в качестве упражнения.

Лекция 9

§1. Дифференцирование неявно заданной функции.

Если функция $R \to R$ задана уравнением $y = f(x)$, говорят, что она *задана явно*. Функция может быть задана также уравнением вида

$$F(x, y) = 0 .$$

В этом случае говорят, что она задана неявно. Иногда данное уравнение можно разрешить относительно переменной y, перейдя, таким образом, от неявной формы задания функции к явной. Однако, в общем случае, этого сделать нельзя. В связи с этим возникает проблема вычисления производной неявно заданной функции. Продемонстрируем метод вычисления производной для такого случая на следующем примере.

Пример. Найдем производную функции $y(x)$, заданной уравнением

$$\ln(x + y) = xy .$$

Продифференцируем обе части равенства по переменной x, не забывая о том, что y является функцией этой переменной. Получим:

$$\frac{1 + y'}{x + y} = y + xy' .$$

Действительно, в левой части исходного уравнения стоит сложная функция $z = \ln(x + y)$ переменной x. Внутренняя функция – $v = x + y(x)$, внешняя – $u = \ln v$. Производная внешней функции равна $u' = \frac{1}{v} = \frac{1}{x + y}$, производная внутренней – $v' = 1 + y'$. В правой части равенства находится произведение двух функций $x \cdot y(x)$.

Теперь выразим из полученного равенства y':

$$\frac{1}{x + y} + \frac{y'}{x + y} = y + xy'$$

$$\frac{y'}{x + y} - xy' = y - \frac{1}{x + y}$$

$$\left(\frac{1}{x + y} - x \right) y' = y - \frac{1}{x + y}$$

$$y' = \frac{y - \frac{1}{x + y}}{\frac{1}{x + y} - x} = \frac{y(x + y) - 1}{1 - x(x + y)} = \frac{y^2 + xy - 1}{1 - xy - x^2} .$$

Из этого примера видно, что производная y' в конечном счете представляется в виде выражения, зависящего как от x, так и от y.

§2. Логарифмическое дифференцирование

Метод логарифмического дифференцирования или предварительного логарифмирования используется в двух случаях.

1. Пусть требуется найти производную функции вида $y=[u(x)]^{v(x)}$. Эта функция не является степенной, поскольку показатель степени зависит от x и не является показательной, поскольку основание степени зависит от x. Метод дифференцирования подобных функций рассмотрим на простом примере.

Пример. Продифференцируем функцию $y=x^x$. Для этого сначала прологарифмируем ее:

$$\ln y=\ln x^x=x\ln x.$$

В результате использования известного свойства логарифма, мы получили произведение двух функций. Продифференцировав теперь обе части равенства по переменной x, получим:

$$\frac{y'}{y}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1.$$

Производная левой части найдена по формуле дифференцирования сложной функции $\ln y(x)$ (внутренняя функция – $v=y(x)$, внешняя – $u=\ln v$), производная правой части – по формуле дифференцирования произведения. Теперь остается выразить y':

$$y'=y\cdot(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$

2. Логарифмическое дифференцирование используется также, когда требуется продифференцировать дробь с большим числом сомножителей в числителе и в знаменателе.

Пример. Найдем производную дроби

$$y=\frac{xe^x\sqrt{x-1}}{x^4(x+2)^3\sin x}.$$

Это можно было бы сделать и без предварительного логарифмирования, использовав правила дифференцирования частного и произведения, но выкладки в этом случае были бы весьма громоздкими. Итак, прологарифмируем обе части равенства и, воспользовавшись известными свойствами логарифма:

$$\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b;\ \ln ab=\ln a+\ln b;\ \ln a^b=b\ln a,$$

получим:

$$\ln y=\ln x+x+\frac{1}{2}\ln(x-1)-4\ln x-3\ln(x+2)-\ln(\sin x).$$

Продифференцировав теперь обе части равенства, найдем:

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}+1+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{4}{x}-\frac{3}{x+2}-\frac{\cos x}{\sin s},$$

Откуда

$$y'=y\cdot\left(\frac{1}{x}+1+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{4}{x}-\frac{3}{x+2}-ctgx\right)=\frac{xe^x\sqrt{x-1}}{x^4(x+2)^3\sin x}\cdot\left(\frac{1}{x}+1+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{4}{x}-\frac{3}{x+2}-ctgx\right).$$

Далее можно привести дроби к общему знаменателю и выполнить необходимые упрощения.

§3. Таблица производных.

Запишем таблицу производных основных элементарных и гиперболических функций. Многие из этих производных были найдены ранее. Другие, в качестве упражнения, рекомендуется найти самим.

1. $C'=0$
2. $x'=1$
3. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$
5. $\left(e^x\right)'=e^x$
6. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$
7. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
8. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
9. $(\sin x)'=\cos x$
10. $(\cos x)'=-\sin x$
11. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
12. $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
17. $(shx)'=chx$
18. $(chx)'=shx$
19. $(thx)'=\dfrac{1}{ch^2x}$
20. $(cthx)'=-\dfrac{1}{sh^2x}$.

§4. Производные высших порядков.

Опр. Пусть задана дифференцируемая на $[a,b]$ функция $y=f(x)$ и пусть $y'=f'(x)$ – ее производная на этом сегменте. Тогда функция $y''=\left(y'\right)'$, если она существует, называется *производной 2-го порядка* или второй производной функции $y=f(x)$. Аналогично, функция $y'''=\left(y''\right)'$ называется *производной 3-го порядка* или третьей производной функции $y = f(x)$. В общем случае, n-ой производной функции $y = f(x)$ называется производная от $(n-1)$-ой производной этой функции:

$$y^{(n)} \overset{df}{=} \left(y^{(n-1)}\right)', \ n = 2, 3, \ldots \ .$$

Пример.

$y = e^{-kx}$

$y' = -ke^{-kx}$

$y'' = \left(-ke^{-kx}\right)' = (-1)^2 k^2 e^{-kx}$

$y''' = \left((-1)^2 k^2 e^{-kx}\right)' = (-1)^3 k^3 e^{-kx}$

...

$y^{(n)} = (-1)^n k^n e^{-kx}$

Введем обозначения:

$C[a,b]$ – класс функций, непрерывных на $[a,b]$.

$C^1[a,b]$ – класс функций, имеющих непрерывную производную на $[a,b]$.

$C^2[a,b]$ – класс функций, имеющих непрерывную 2-ую производную на $[a,b]$.

…

$C^n[a,b]$ – класс функций, имеющих непрерывную n-ую производную на $[a,b]$.

$C^\infty[a,b]$ – класс функций, имеющих непрерывные производные любого порядка (бесконечно дифференцируемых).

Аналогичные обозначения используются для функций, имеющих непрерынвные производные n-го порядка на интервале, полуинтервале, в точке. Например, $C^n(a,b)$, $C^n[a,b)$, $C^n(x_0)$.

§5. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

Функция $y = f(x)$ может быть задана системой уравнений:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]. \qquad (1)$$

В этом случае говорят, что эта функция задана *параметрически*, а переменную t называют *параметром*.

Пример. Рассмотрим функцию

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, t \in [0, \pi]. \qquad (2)$$

Эта функция описывает верхнюю половинку окружности рис. 1. Действительно, координаты любой точки, удовлетворяющей приведенным уравнениям, удовлетворяют, очевидно, также уравнению

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

а это уравнение окружности с центром в начале координат, радиусом R. Выразив y, получим:

$$y = +\sqrt{R^2 - x^2}\ . \qquad (3)$$

Знак «+» выбран потому, что $y = \sin t \geq 0$ при $t \in [0, \pi]$. Координаты точки на плоскости удовлетворяют уравнениям (2) тогда и только тогда, когда они удовлетворяют уравнению (3), а оно описывает верхнюю половинку окружности, изображенной на рис. 1. Параметр t, в данном случае, это угол, образованный радиус-вектором точки на окружности с положительным направлением оси абсцисс (так называемый *полярный угол*).

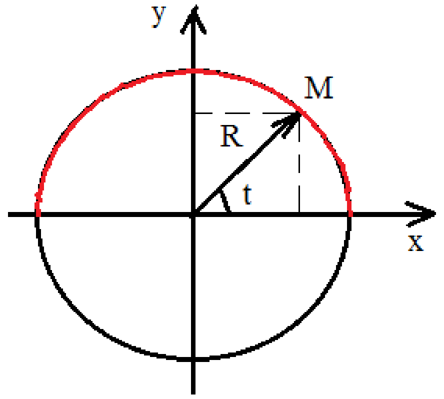


Рис. 1. Кривая, заданная параметрически.

Хотя параметрическое задание кривой, на первый взгляд, может показаться надуманным, оно имеет отчетливый физический смысл: если трактовать x и y как координаты материальной точки на плоскости (например, Броуновской частицы на поверхности стакана с водой, или центра масс Земли на околосолнечной орбите), а t как время, то уравнения (1) представляют собой уравнения движения материальной точки. В трехмерии параметрическое задание кривой:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \ \ t \in [\alpha, \beta] \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

является наиболее удобным и физически осмысленным способом задания.

Итак, пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически уравнениями (1). Допустим, что функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ имеют производные и допустим, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, которая тоже имеет производную. Тогда функцию $y = f(x)$ можно рассматривать как сложную функцию аргумента x:

$$y = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right) = y\left(t(x)\right)$$

Используя теоремы о производной сложной и обратной функции, получим:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Здесь через x'_t и y'_t обозначены производные функций (1) по переменной t. Таким образом, мы получили формулу, позволяющую дифференцировать функцию $y(x)$, не находя ее явного выражения:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Аналогичным образом можно получить формулы для производных от функции $y = f(x)$ высших порядков. Выведем, например, формулу для 2-ой производной. Полученное нами выражение для 1-ой производной представляет собой некоторую функцию переменной t:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = y_1(t) = y_1\left(t(x)\right).$$

Рассматривая ее как сложную функцию аргумента x, получим:

$$y''_{xx}=\left(y'_x\right)'_x=\left(y'_x\right)'_t\cdot t'_x=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$$

Итак, формула для вычисления 2-ой производной функции заданной параметрически имеет вид:

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}.$$

Запишем эту формулу в «развернутом» виде (выразим 2-ую производную через исходные функции):

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y''_{tt}\,x'_t-y'_t\,x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^2}\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y''_{tt}\,x'_t-y'_t\,x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}$$

Итак,

$$y''_{xx}=\frac{y''_{tt}\,x'_t-y'_t\,x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Аналогично можно найти производные более высоких порядков.

Пример.

Рассмотрим функцию

$$\begin{cases}x=\cos 2t\\ y=2\sin 2t\end{cases}$$

и найдем y'_x и y''_{xx}. Очевидно,

$$y'_x=\frac{4\cos 2t}{-2\sin 2t}=-2ctg2t.$$

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=-\frac{4}{2\sin^2 2t\cdot\sin 2t}=-\frac{2}{\sin^3 2t}.$$

§6. Механический смысл 2-ой производной.

Путь, пройденный поступательно движущимся телом (материальной точкой), в зависимости от времени выражается формулой: $S=S(t)$. Как говорилось ранее, мгновенная скорость тела равна: $V(t)=S'_t$. Пусть в некоторый момент времени t скорость тела была равна V. Если движение не является равномерным, то за промежуток времени Δt, истекший с момента t, скорость изменится и получит приращение ΔV. Если движение равноускоренное, то ускорение можно определить формулой

$$a=\frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Однако, в случае не равноускоренного движения, это отношение зависит от величины Δt. Чтобы определить ускорение для этого случая, прежде всего, введем понятие среднего ускорения за промежуток времени Δt.

Опр. *Средним ускорением* тела за время Δt назовем отношение приращения скорости к приращению времени:

$$a_{cp}=\frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Опр. *Ускорением* движения физического тела в момент времени t назовем предел отношения приращения скорости к приращению времени, при стремлении последнего к нулю:

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t}.$$
Другими словами,
$$a=V'(t)=S''(t).$$
Итак, ускорение прямолинейного движения равно второй производной от пути по времени. В этом состоит механический смысл второй производной.

§ 7. Дифференциал функции.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности $u(x_0)$ и дифференцируема в точке x_0. Тогда ее приращение представимо в виде (по определению дифференцируемости):
$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x). \qquad (1)$$
Опр. Первое слагаемое в правой части формулы (1), линейное относительно приращения переменной Δx:
$$dy=f'(x_0)\Delta x \qquad (2)$$
называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0. Отметим, что в общем случае $f'(x_0)\neq 0$ и $f'(x_0)\Delta x$ – главная часть бесконечно малой функции $\Delta y(\Delta x)$ при $\Delta x\to 0$. Иными словами, $\Delta y \sim dy$ при $\Delta x\to 0$. Найдем дифференциал функции $y=x$. Используя формулу (2), получим:
$$dy=x'\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x.$$
С другой стороны, поскольку $y=x$, $dy=dx$. Таким образом, *дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением*:
$$dx=\Delta x.$$
Это позволяет записать формулу (2) в виде:
$$dy=f'(x_0)\,dx.$$
Или, если функция $y=f(x)$ дифференцируема на промежутке (например, на сегменте $[a,b]$), то в любой точке этого промежутка
$$dy=f'(x)dx. \qquad (3)$$
Эта формула называется *формулой вычисления дифференциала*.

Пример. Дифференциал функции $y=e^{x^2}$, очевидно, равен
$$dy=2xe^{x^2}dx.$$
Отметим, что дифференциал, по существу, представляет собой функцию двух независимых переменных: x и Δx. Из формулы (3) очевидно следует, что производную функции можно представить в виде отношения дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной:
$$y'=\frac{dy}{dx}$$
(читается «y' равно dy по dx»).

Замечание. С учетом сказанного, можно легко получить выведенную ранее формулу для производной функции заданной параметрически. Действительно,
$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

§ 8. Геометрический смысл дифференциала.

Как известно, уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке (x_0, y_0), где $y_0 = f(x_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Не трудно заметить, что правая часть этого уравнения равна дифференциалу функции $f(x)$ в точке x_0: $f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\Delta x = dy$. Таким образом,

$$dy = y - y_0,$$

т.е. дифференциал функции $f(x)$ равен приращению ординаты касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующему приращению независимого аргумента Δx (см. рис. 2). В этом и состоит *геометрический смысл дифференциала* функции.

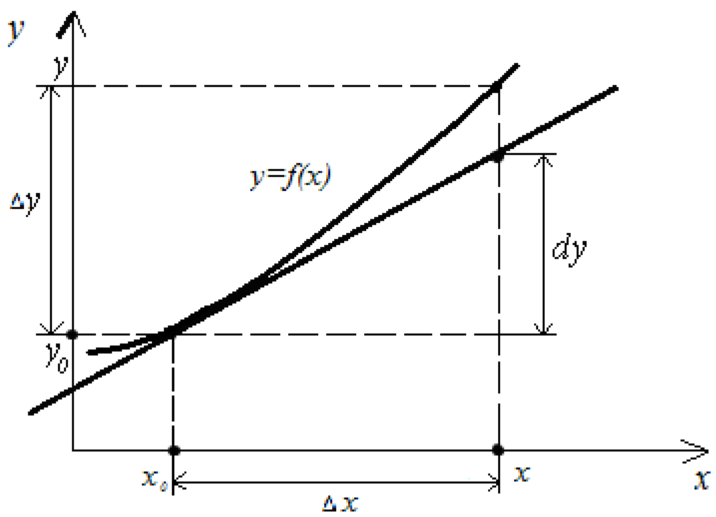


Рис. 2. Геометрический смысл дифференциала.

§ 9. Инвариантность формы первого дифференциала.

Формулу (3) иногда называют формой первого дифференциала. Мы получили ее в предположении, что x – независимая переменная. Докажем, что она останется справедливой и в случае, если x – функция некоторой независимой переменной t.

Теорема. Форма первого дифференциала (3) не зависит от того, является аргумент x независимой переменной или функцией другого аргумента.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$, т.е. y – сложная функция независимой переменной t:

$$y = f(x) = f(\varphi(t)) = F(t).$$

По формуле вычисления дифференциала, имеем:

$$dy = F'(t)dt.$$

С другой стороны, по теореме о производной сложной функции,

$$F'(t) = f'(x)\varphi'(t),$$

Значит

$$dy = f'(x)\varphi'(t)dt = f'(x)dx,$$

поскольку

$$\varphi'(t)dt = dx.$$

Таким образом, дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент x был независимой переменной. Форма (3) не изменилась.

Теорема доказана.

§ 10. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Как говорилось выше, если функция дифференцируема в точке x_0, то ее приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

и если $f'(x_0) \neq 0$, то

$$\Delta y \sim f'(x_0)\Delta x,$$

т.е.

$$\Delta y \sim dy \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Эквивалентность означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1$,т.е. при достаточно малых $|\Delta x|$ отношение $\dfrac{\Delta y}{dy}$ будет сколь угодно близко к единице :

$\left|\dfrac{\Delta y}{dy} - 1\right| < \varepsilon$, для сколь угодно малого ε, если только Δx достаточно мало (по абсолютной величине). Иными словами, при малых по модулю Δx, можно приближенно заменить Δy на dy:

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x. \qquad (4)$$

Причем, чем меньше $|\Delta x|$, тем выше точность этого приближения.

Последнее позволяет использовать дифференциал для приближённых вычислений начений различных функций. Действительно, пусть нам известны значения функции $f(x_0)$ и её производной $f'(x_0)$ в точке x_0, и требуется найти приближённое значение функции $f(x)$ в достаточно близкой к x_0 точке $x = x_0 + \Delta x$: $f(x_0 + \Delta x) = ?$ Т.к., по определению приращения функции,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

то $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$ и, с учетом (4),

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (5)$$

Точность этой приближенной формулы тем выше, чем меньше $|\Delta x|$.

Поскольку, дифференциал, как известно, равен приращению ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0, приближение (5) есть приближение графика функции участком касательной в малой окрестности точки x_0 (рис. 3).

Примеры. В достаточно малой окрестности точки x_0 справедливы следующие формулы:

1) $\sin(x_0 + \Delta x) \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot \Delta x$

2) $\ln(x_0 + \Delta x) \approx \ln x_0 + \dfrac{\Delta x}{x_0}$

3) $\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \dfrac{\Delta x}{2\sqrt{x_0}}$

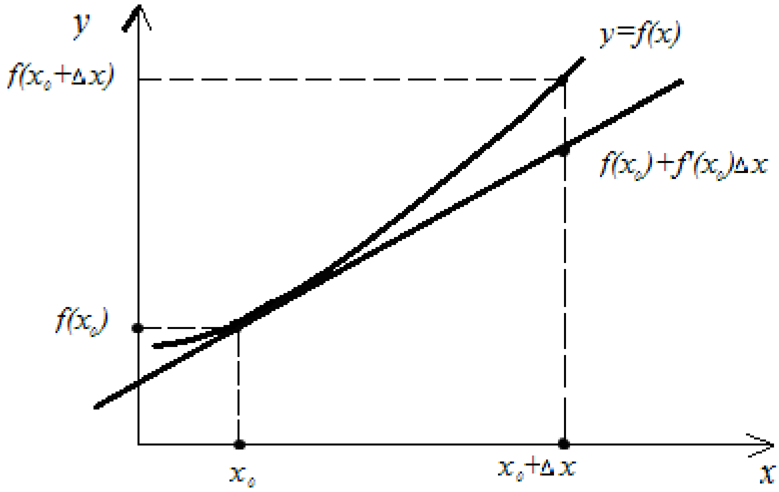


Рис. 3. Использование дифференциала в приближенных вычислениях.

Найдем, для более конкретного примера, приближенное значение $\ln(1.1)$.
Используя вторую из приведенных формул, получим:

$$\ln(1.1) = \ln(1+0.1) \approx \ln 1 + \frac{0.1}{1} = 0.1$$

Здесь $x_0 = 1$, а $\Delta x = 0.1$.

§ 11. Правила вычисления дифференциала.

Используя формулу вычисления дифференциала и правила дифференцирования, не трудно получить следующие формулы:

1) $d(const) = 0$

2) $d(u+v) = du + dv$

3) $d(uv) = udv + vdu$

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{udu - vdv}{b^2}$

Здесь имеется в виду, что u и v в – некоторые функции независимой переменной x.

Выведем, для примера, 2-ю и 4-ю формулы:

$$d\ (u+v)\ =\ (u+v)'\,dx\ =\ (u'+v')\ dx\ =\ u'dx + v'dx\ =\ du + dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2}dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Остальные формулы выводятся аналогично.

§ 12. Дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на сегменте $[a,b]$. Тогда в каждой точке этого сегмента существует дифференциал.

$$dy = f'(x)dx.$$

При этом, очевидно, дифференциал можно рассматривать как функцию переменной x :

$$dy = dy(x),\ x \in [a,b].$$

Отметим, что приращение $dx = \Delta x$ не является функцией от x, поэтому дифференциал зависит от x только через $f'(x)$. Раз дифференциал – это функция, то можно вычислить дифференциал этой функции (дифференциал дифференциала).

Вторым дифференциалом (*дифференциалом второго порядка*) функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала этой функции:

$$d^2 y = d(dy)$$

Аналогично, *третьим дифференциалом* (*дифференциалом 3-го порядка*) функции $y = f(x)$ называется дифференциал от второго дифференциала этой функции:

$$d^3 y = d(d^2 y)$$

В общем случае введем следующее определение.

Опр. *n – ым дифференциалом* или *дифференциалом n - го порядка* функции $y = f(x)$ называется дифференциал от $(n\text{-}1)$ – го дифференциала этой функции:

$$d^n y = d(d^{n-1} y),\quad n = 2,3,\dots .$$

Используя формулу вычисления первого дифференциала, найдем явные выражения для дифференциалов высших порядков. Для второго дифференциала имеем:

$$d^2 y = d(dy) = d(y'dx) = (y'dx)'\,dx = y''(dx)^2 = y''dx^2\ ,$$

Итак:

$$d^2 y = y''dx^2\ ,$$

Следует подчеркнуть, что под dx^2 здесь подразумевается квадрат дифференциала, а не дифференциал квадрата: $dx^2 = (dx)^2$.

Аналогично, для третьего дифференциала имеем:

$$d^3 y = d(d^2 y) = d(y''dx^2) = (y''dx^2)'dx = y'''dx^3\ ,$$

где использовано обозначение: $dx^3 = (dx)^3$.

В общем случае, для дифференциала n-го порядка, найдем:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = d(y^{(n-1)}dx^{n-1}) = (y^{(n-1)}dx^{n-1})'\,dx = y^{(n)}(dx)^n = y''dx^n\ ,$$

где использовано обозначение: $dx^n = (dx)^n$. Итак, мы получили формулу вычисления n-го дифференциала:

$$d^n y = y^{(n)}dx^n;\quad n = 1,2,\dots .$$

Очевидно, что из полученной формулы следует формула для производной n-го порядка:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

(читается: $d^n y$ по dx^n). В частности:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2},\ \ y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

и т.д.

Замечание. Свойством инвариантности формы дифференциалов высших порядков не обладают. Поэтому полученные формулы связи дифференциала с производной при $n > 1$ верны только в том случае, если x – независимая переменная.

Лекция №10

§1. Теорема Ферма.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности т. x_0 и пусть в точке x_0 она достигает своего наибольшего или наименьшего значения. Тогда, если в точке x_0 существует производная этой функции, то она равна нулю.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения в точке x_0. Тогда для любого (как положительного, так и отрицательного) Δx

$$f(x_0 + \Delta x) \le f(x_0)$$

и приращение функции в точке x_0

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0.$$

1) Пусть $\Delta x > 0$, тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0 +) \le 0$;

2) Пусть $\Delta x < 0$, тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0 -) \ge 0$.

Поскольку, по условию теоремы, функция $f(x)$ имеет (конечную) производную в точке x_0, то существует двусторонний предел

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

но, как известно, это возможно только в том случае, если существуют оба соответствующих односторонних предела и они равны. При этом двусторонний предел равен односторонним:

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Однако, из полученных неравенств для односторонних пределов, очевидно, что они могут быть равны тогда и только тогда, когда они оба равны нулю. Следовательно, нулю равен и двусторонний предел, т.е. $y'(x_0)$:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

В случае, когда функция достигает в точке x_0 своего наименьшего значения, доказательство проводится аналогично.

Теорема доказана.

Эта теорема имеет наглядный геометрический смысл (рис. 1). Касательная к гладкому графику в точке максимума или минимума (наибольшего или наименьшего значения) параллельна оси абсцисс.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) Непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) Дифференцируема на интервале (a,b);

3) Принимает одинаковые значения на границах сегмента $[a,b]$: $f(a) = f(b)$

Тогда найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

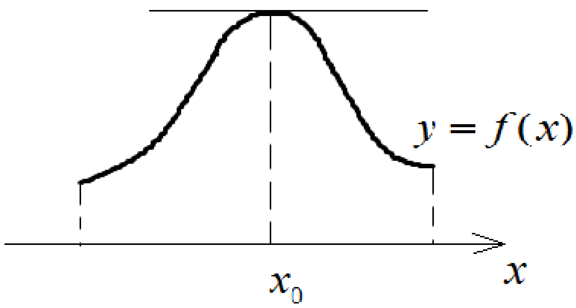


Рис. 1. Иллюстрация к теореме Ферма.

§2.Теорема Ролля.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, она принимает на этом сегменте свое наибольшее (M) и свое наименьшее (W) значения (одно из свойств функции, непрерывной на отрезке):

$\exists c \in [a,b] : f(c) = M$

$\exists c' \in [a,b] : f(c') = W$

1) Допустим, для начала, что наибольшее и наименьшее значения равны: $W = M$. Очевидно, что в этом случае на отрезке $[a,b]$ $f(x) = const$. Действительно, так как W и M а – наименьшее и наибольшее значения функции, то

$W \le f(x) \le M, x \in [a,b].$

Но, с учетом того, что

$W = M,$

$M \le f(x) \le M.$

Следовательно,

$f(x) = M = const, x \in [a,b].$

Производная постоянной равна нулю в любой точке и утверждение теоремы в этом простейшем случае выполняется.

2) Допустим теперь, что $W \ne M$. В этом случае, одно из этих чисел не совпадает со значением функции на границах сегмента $f(a) = f(b)$. Пусть, для определённости, это M. Тогда функция $f(x)$ принимает свое наибольшее значение не на границе сегмента, а в некоторой внутренней точке c интервала (a,b):

$f(c) = M,\ c \in (a,b).$

Рассмотрим произвольную окрестность $\dot{u}(c)$ точки c, лежащую внутри интервала (a,b):

$\dot{u}(c) \subset (a,b).$

В этой окрестности функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ферма, а значит

$f'(c) = 0.$

Действительно,

Теорема доказана.

На рис. 2 представлена иллюстрация теоремы Ролля. В точке c касательная к графику параллельна оси абсцисс.

Замечание. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема не во всех точках интервала (a,b), то утверждение теоремы может оказаться неверным, т.е. на (a,b) может не оказаться точки c, в которой $f'(c) = 0$. Так на рис. 3 представлен график функции $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на сегменте $x \in [-1,1]$. Эта функция непрерывна да данном отрезке и принимает одинаковые значения на его границах, однако, не дифференцируема в точке $x = 0$. Очевидно, что нигде внутри интервала $(-1,1)$ производная в ноль не обращается.

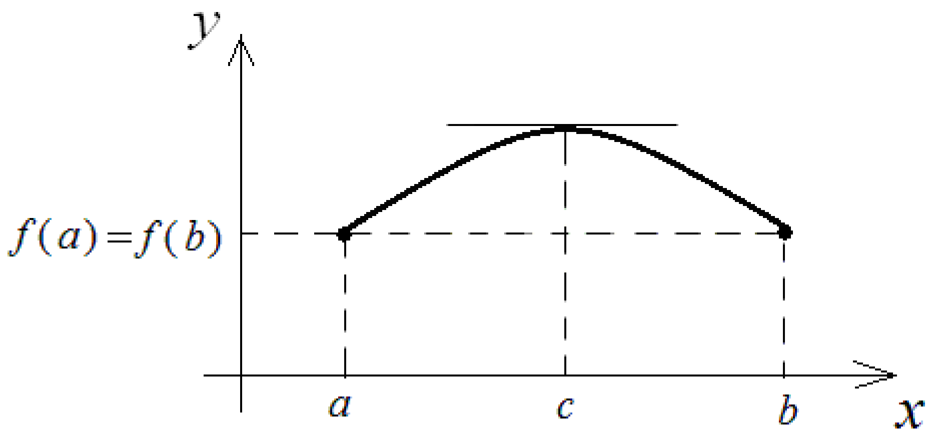


Рис. 2. Иллюстрация к теореме Ролля

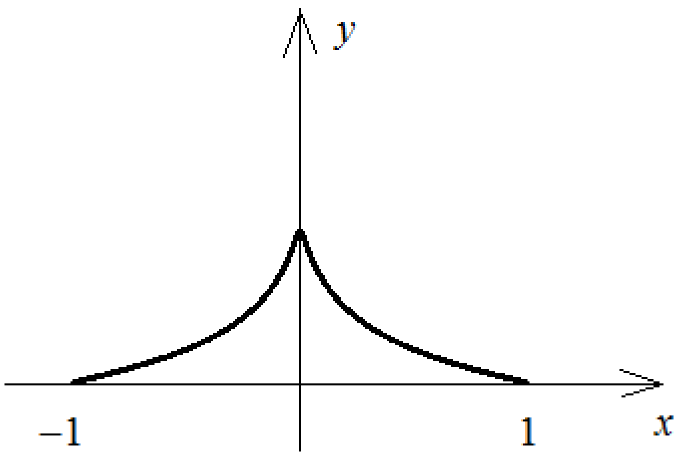


Рис. 3. Контрпример к теореме Ролля.

§3.Теорема Лагранжа.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям

1. Непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2. Дифференцируема на интервале (a,b).

Тогда найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что выполняется равенство:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ . \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \alpha x$, где α – некоторая постоянная. Эта функция непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), в силу соответствующих свойств функций $f(x)$ и αx. Постоянную α выберем из условия $F(a) = F(b)$:

$$f(a)-\alpha a = f(b)-\alpha b,$$

откуда

$$\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Теперь функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. По теореме Ролля существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $F'(c)=0$, т.е.

$$f'(c)-\alpha = 0,$$

или

$$f'(c)=\alpha.$$

С учетом найденного выражения α, имеем:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Теорема доказана.

Формула (1) называется *формулой Лагранжа.*

На рис. 4. представлена геометрическая иллюстрация теоремы Лагранжа. Как известно, производная функции равна тангенсу угла между касательной к ее графику и положительным направлением оси абсцисс, значит $f'(c)=tg\alpha$. В правой части равенства (1) стоит отношение катета BC к катету AB прямоугольного треугольника ABC, т.е. тангенс угла α' между прямой AC, проходящей через граничные точки дуги графика, и положительным направлением оси абсцисс:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=tg\alpha'.$$

Таким образом, формула Лагранжа означает, что $tg\alpha = tg\alpha'$ и *геометрический смысл теоремы Лагранжа* состоит в том, что найдется точка c, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна хорде AC, стягивающей граничные точки дуги графика.

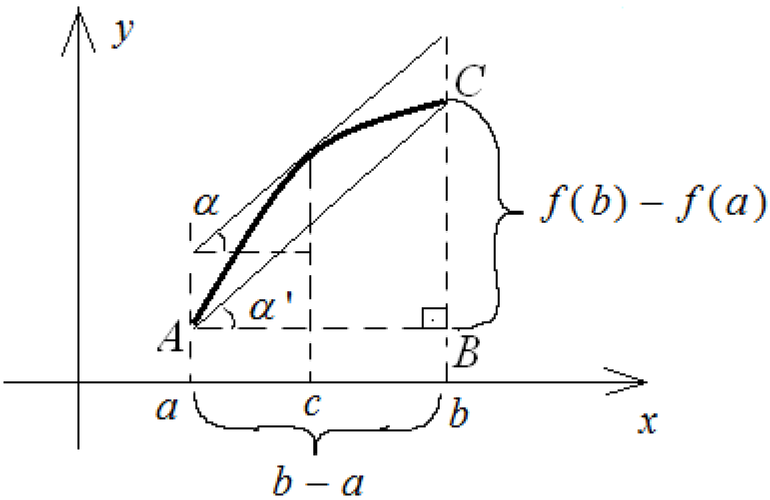


Рис. 4. Иллюстрация к теореме Лагранжа.

Замечание. Формула (1) справедлива не только при $b>a$, но и при $b<a$. Действительно, если $b<a$, применяя теорему Лагранжа на отрезке $[b,a]$, получим:

$$f'(c)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}, \quad c \in (b,a).$$

Умножив числитель и знаменатель дроби в правой части на -1, снова придем к равенству (1).

Замечание. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Пусть Δx – приращение аргумента (не выводящее из этой окрестности), а Δy – соответствующее приращение функции. Пусть, для определенности $\Delta x > 0$. Применяя теорему Лагранжа на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, получим:

$$f'(c) = \frac{\Delta y}{\Delta x},\ \ c \in (x_0, x_0 + \Delta x),$$

или

$$\Delta y = f'(c)\Delta x.$$

Эта формула, связывающая конечные приращения функции и аргумента с производной функции, называется *формулой конечных приращений Лагранжа*. Из первого замечания очевидна, что она справедлива также для $\Delta x < 0$ (только, в этом случае, $c \in (x_0 + \Delta x, x_0)$). Используя вспомогательный параметр θ: $0 < \theta < 1$, можно записать формулу конечных приращений в виде:

$$\Delta y = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x$$

(здесь c представлено как $c = x_0 + \theta\Delta x$).

Замечание. Теорему Ролля можно рассматривать как частный случай теоремы Лагранжа. Действительно, добавив к условиям теоремы Лагранжа условие $f(b) = f(a)$, из формулы Лагранжа получим:
$f'(c) = 0$.

Известно, что производная постоянной равна нулю. Основываясь на теореме Лагранжа, можно показать и обратное: если производная функции равна нулю, то эта функция есть постоянная.

Лемма (следствие теоремы Лагранжа)**.** Пусть $f'(x) \equiv 0$ на интервале (a,b). Тогда $f(x) = const$ на этом интервале.

Доказательство. Выберем произвольные $x_1, x_2 \in (a,b)$, такие, что $x_2 > x_1$. На $[x_1, x_2]$ выполнены условия теоремы Лагранжа (действительно, раз функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), то она непрерывна на этом интервале, сегмент же $[x_1, x_2]$ вложен в интервал (a,b)). По теореме Лагранжа,

$$\exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

Но, т.к. $f'(x) = 0 \ \ \forall x \in (a,b)$ и, в частности, $f'(c) = 0$, то $f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$. В силу произвольности выбора x_1 и x_2, приходим к выводу, что значения функций $f(x)$ в любых двух точках (a,b) совпадают, т.е. $f(x) = const$ на (a,b).

Лемма доказана.

§4. Теорема Коши.

Теорема. Пусть заданы две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ и пусть выполняются следующие условия:

1) $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$;

2) $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b);
3) $\varphi'(x) \neq 0,\ \ x \in (a,b)$.

Тогда $\exists c \in (a,b)$, такая, что справедливо равенство:

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}. \qquad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \alpha\varphi(x),$$

где α – некоторая постоянная. Эта функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ (в силу непрерывности $f(x)$ и $\varphi(x)$ на этом отрезке) и дифференцируема на интервале (a,b) (в силу дифференцируемости $f(x)$ и $\varphi(x)$ на этом интервале). Выберем α из условия

$$F(a) = F(b):$$

$$f(a) - \alpha\varphi(a) = f(b) - \alpha\varphi(b)$$

$$\alpha(\varphi(b) - \varphi(a)) = f(b) - f(a).$$

Чтобы выразить α, убедимся, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$. Действительно, если $\varphi(b) = \varphi(a)$, то функция $\varphi(x)$ на $[a,b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля и, следовательно, $\exists x_0 \in (a,b): \varphi(x_0) = 0$, что противоречит третьему условию настоящей теоремы. Следовательно, $\varphi(b) \neq \varphi(a)$ и

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

Теперь функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, следовательно $\exists c \in (a,b): F'(c) = 0$, т.е.

$$f'(c) - \alpha\varphi'(c) = 0 .$$

С учетом выражения для α, отсюда получим:

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \alpha = \frac{f'(b) - f'(a)}{\varphi'(b) - \varphi'(a)}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Также как и формула (1), формула (2) справедлива не только при $b > a$, но и при $b < a$. Действительно, если $b < a$, применяя теорему Коши на отрезке $[b,a]$, получим:

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(a) - f(b)}{\varphi(a) - \varphi(b)}, \ c \in (b,a).$$

Умножив теперь числитель и знаменатель дроби в правой части на -1, снова придем к равенству (2).

Замечание. Нетрудно убедиться, что теорему Лагранжа можно рассматривать как частный случай теоремы Коши при $\varphi(x) = x$.

§5. Правило Бернулли – Лопиталя.

Сформулируем и докажем теорему, позволяющую легко вычислять пределы.

Теорема. Пусть в некоторой окрестности $u(a)$ точки a определены функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, удовлетворяющие следующими условиям:

1. $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в $u(a)$;
2. $f(a) = 0$ и $\varphi(a) = 0$;
3. $\varphi'(x) \neq 0$, в $u(a)$;
4. $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$.

Тогда существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A.$$

Доказательство. Пусть $x\in u(a)$. Тогда, при $x>a$, на отрезке $[a,x]$ (при $x<a$, на отрезке $[x,a]$) функции f и φ удовлетворяют условиям теоремы Коши. Следовательно, $\exists c\in(a,x)$ (либо, соответственно, интервалу (x,a)) такая, что

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}\ ,$$

или, с учетом того, что $f(a)=0$ и $\varphi(a)=0$,

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Переходя к пределу при $x\to a$, с учетом того, что отрезок $[a,x]$ ($[x,a]$), внутри которого находится точка c в этом пределе стягивается в точку, т.е. $c\to x$, получим:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Теорема доказана.

Итак, предел отношения функций, в случае неопределенности $\frac{0}{0}$, при выполнении ряда естественных условий, равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Эта теорема представляет собой частный случай более общей теоремы, называемой *правилом Бернулли-Лопиталя.*

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0.$$

Замечание. При вычислении пределов, правило Бернулли-Лопиталя иногда применяется несколько раз.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

Дадим теперь общую формулировку правила Бернулли-Лопиталя, которая допускает, во-первых, неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, во-вторых, произвольное стремление аргумента (например, $x\to\infty$).

Теорема (правило Бернулли-Лопиталя). Пусть в некоторой окрестности $u(*)$ точки $*$ определены функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

5. $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в $u(a)$;
6. $f(a)\to 0$ и $\varphi(a)\to 0$ при $x\to *$, или $f(a)\to\infty$ и $\varphi(a)\to\infty$ при $x\to *$;

7. $\varphi'(x) \neq 0$, в $u(a)$;

8. $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$.

Тогда существует

$$\lim_{x\to *}\frac{f(x)}{\varphi(x)} \overset{\frac{0}{0}\vee\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to *}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Пример.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} \overset{\frac{1}{\infty}}{=} 0.$$

Замечание. Правило Бернулли-Лопиталя дает достаточное, но необходимое условие существования $\lim\limits_{x\to *}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$. Если $\lim\limits_{x\to *}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не существует, то $\lim\limits_{x\to *}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ всё равно может существовать.

Пример. Предел отношения функций

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$$

с неопределенностью $\dfrac{\infty}{\infty}$ существует и равен единице. Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1,$$

т.к. $\dfrac{\sin x}{x} \to 0$ при $x\to\infty$ по теореме о произведении бесконечно малой на локально ограниченную. В то же время, соответствующий предел отношения производных

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$, очевидно, не существует.

§6. Раскрытие неопределённостей других видов.

Мы видели, что правило Бернулли-Лопиталя можно использовать для раскрытия неопределенностей типа $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Рассмотим теперь, как его использовать в случае неопределенностей других типов.

1. Неопределенность $0\cdot\infty$ легко преобразуется в неопределенность $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$0\cdot\infty = 0\cdot\frac{1}{0} = \frac{0}{0};$$

$$0\cdot\infty = \frac{1}{\infty}\cdot\infty = \frac{\infty}{\infty}.$$

Под этими «символическими» преобразованиями подразумеваются со ответствующие преобразования над функциями, стоящими под знаком предела. Например, первая последовательность преобразований означает следующее:

$$\lim_{x\to *} f(x)g(x) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to *} f(x)\frac{1}{1/g(x)} \overset{0\cdot\frac{1}{0}}{=} \lim_{x\to *}\frac{f(x)}{1/g(x)}.$$

Очевидно, последний предел содержит неопределенность $\frac{0}{0}$. После преобразования произведения в дробь (преобразования типа неопределенности), используется правило Бернулли-Лопиталя. На практике все выглядит гораздо проще и естественней, чем в теории.

Пример.

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} -\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{1/x^2} = -\lim_{x\to 0+} x = 0.$$

2. Неопределенность $\infty-\infty$ преобразуется следующим образом:

$$\infty - \infty = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{0-0}{0\cdot 0} = \frac{0}{0},$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) \overset{\infty-\infty=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} \overset{\frac{0}{2}}{=} 0.$$

3. На равнее с неопределенностью 1^∞ существуют также неупоминавшиеся ранее неопределенности 0^0 и ∞^0. Все три типа неопределенностей преобразуются в неопределенность $0\cdot\infty$ по одной и той же схеме:

$$1^\infty = e^{\ln 1^\infty} = e^{\infty\cdot\ln 1} = e^{\infty\cdot 0}$$

$$0^0 = e^{\ln 0^0} = e^{0\ln 0} = e^{0\cdot\infty}$$

$$\infty^0 = e^{\ln\infty^0} = e^{0\ln\infty} = e^{0\cdot\infty}.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0+} x^x \overset{0^0}{=} \lim_{x\to 0+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} \overset{0\cdot\infty}{=} e^0 = 1.$$

Здесь мы воспользовались результатами первого примера.

§7. Сравнение роста показательной, степенной, и логарифмической функций при $x\to+\infty$.

Покажем, что при больших x любая показательная функция (с основанием больше единицы) растет быстрее степенной (с положительным показателем), а степенная – быстрее логарифмической. Нам понадобится следующее определение.

Опр. *Факториалом* натурального числа n («n-факториал») называется произведение натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.$$

Факториал нуля по определению равен единице:

$$0! = 1.$$

Пример. $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

1) Рассмотрим степенную функцию с натуральным показателем $f(x)=x^n$, $n\in N$ и показательную функцию с основанием больше единицы:

$g(x)=a^x \quad a>1$.

Покажем, что показательная функция имеет высший порядок роста, по сравнению со степенной при

$x\to+\infty$.

Действительно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x(\ln a)^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}...=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n!}{a^x(\ln a)^n}=0$.

Таким образом,

$$x^n = o(a^x) \text{ при } x\to+\infty.$$

Можно показать, что это равенство справедливо не только для натуральной степени:

$$\forall\alpha>0 \;\; x^\alpha = o(a^x) \text{ при } x\to+\infty.$$

Итак, показательная функция при $x\to+\infty$ растёт быстрее любой степени x. В частности,

$$x^\alpha = o(e^x) \text{ при } x\to+\infty.$$

2) Рассмотрим теперь степенную функцию с положительным показателем и натуральный логарифм: $f(x)=x^\alpha$, $\alpha>0$, $g(x)=\ln x$. Покажем, что степенная функция имеет высший порядок роста по сравнению с логарифмом при $x\to+\infty$. Действительно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

Таким образом,

$$\ln x=o(x^\alpha) \text{ при } x\to+\infty.$$

Это равенство справедливо и для логарифма с произвольным основанием $a>1$:

$$\log_a x=o(x^\alpha) \text{ при } x\to+\infty.$$

3) С учетом сказанного, очевидно, что показательная функция имеет высший порядок роста по сравнению с логарифмической при $x\to+\infty$:

$$\log_a x=o(b^x) \text{ при } x\to+\infty$$

$(a,b>1)$.

Лекция № 11

§1. Формула Тейлора.

Пусть функция $y=f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, дифференцируема в этой точке. Тогда, как известно, приращение данной функции в точке x_0 представимо в виде:

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x) \text{ , где } \Delta x=x-x_0.$$

Иными словами,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) \text{ при } x\to x_0.$$

Это равенство представляет собой формулу Тейлора 1-го порядка. Как мы видели ранее, оно позволяет сколь угодно точно вычислить значения функции при достаточно малых Δx. Однако, при больших Δx точность приближения функции по этой формуле будет плохой. В общем случае, формула Тейлора позволяет приближать функцию *f(x)* многочленом *n*-ой степени, причем, выбирая достаточно большое n, можно получить сколь угодно высокую точность приближения.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой окрестности все производные, вплоть до $(n+1)$-го порядка включительно. Построим многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P_n'(x_0) = f'(x_0) \\ P_n''(x_0) = f''(x_0), \quad \text{т.е. } P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),\ k = 0,1,2,...,n . \\ ... \\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{cases} \qquad (1)$$

Эти условия позволяют предположить, что многочлен будет достаточно хорошо приближать функцию $f(x)$ при x близких к x_0, действительно, в точке x_0 значение многочлена совпадает со значением функции, «скорость» изменения значения многочлена – со «скоростью» изменения значения функции, «ускорение» изменения значения многочлена – с «ускорением» изменения значения функции и т.д.

Будем искать этот многочлен в виде:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2 + C_3(x-x_0)^3 + ... + C_n(x-x_0)^n, \qquad (2)$$

где коэффициенты C_k ($k = 0,1,2,...,n$) выберем так, чтобы выполнялись условия (1).

Дифференцируя равенство (2), получим:

$$\begin{cases} P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-x_0) + 3C_3(x-x_0)^2 + ... + nC_n(x-x_0)^{n-1} \\ P_n''(x) = 2C_2 + 3\cdot 2C_3(x-x_0) + ... + n(n-1)C_n(x-x_0)^{n-2} \\ P_n'''(x) = 3\cdot 2C_3 + ... + n(n-1)(n-2)C_n(x-x_0)^{n-3} \\ ... \\ P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdot ...\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_n = C_n n! \end{cases}$$

С учетом условий (1), найдем:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = C_0 = f(x_0) \\ P_n'(x_0) = C_1 = f'(x_0) \\ P_n''(x_0) = 2C_2 = f''(x_0), \\ P_n'''(x_0) = 3\cdot 2\cdot C_3 = f'''(x_0) \\ ... \\ P_n^{(n)}(x_0) = n!\cdot C_n = f^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} C_0 = f(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{0!} \\ C_1 = f'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)}{1!} \\ C_2 = f''(x_0) = \dfrac{f''(x_0)}{2!} \\ C_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{3!} \\ ... \\ C_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \end{cases}$$

Таким образом,

$$C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k = 0,1,2..n$$

и искомый многочлен имеет вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Этот многочлен называется *многочленом Тейлора*.

Введём обозначение

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \qquad (3)$$

Тогда

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

или

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Это равенство называется *формулой Тейлора* n-го порядка, а функция $R_n(x)$ – *остаточным членом* формулы Тейлора.

§2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Покажем, что остаточный член формулы Тейлора пренебрежимо мал при x достаточно близких к x_0, точнее, что $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$. Тем самым мы убедимся, что многочлен Тейлора действительно хорошо приближает функцию $f(x)$ в малой окрестности точки x_0.

Из (1) и (3) следует, что $\begin{cases} R_n(x_0) = 0 \\ R_n'(x_0) = 0 \\ R_n''(x_0) = 0. \\ ... \\ R_n^{(n)}(x_0) = 0 \end{cases}$

С учетом этого,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{R_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} ... = \lim_{x\to x_0}\frac{R^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

Таким образом,

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n) \text{ при } x \to x_0.$$

Остаточный член, записанный в такой форме называется *остаточным членом в форме Пеано*. *Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано* имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

Теперь мы видим, что при x, достаточно близких к x_0, функция $f(x)$ может быть сколь угодно точно приближена многочленом $P_n(x)$. Погрешность этого приближения стремится к нулю при $x \to x_0$.

§3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Получив остаточный член в форме Пеано, мы показали, что многочлен Тейлора хорошо приближает функцию в малой окрестности точки x_0, но ничего не выяснили о точности этого приближения. Остаточный член можно записать также в другой форме, называемой *формой Лагранжа*. Остаточный член в форме Лагранжа позволяет оценить погрешность приближения функции по формуле Тейлора.

Теорема (о представимости функции по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда $\exists c \in (x_0; x)$ при $x > x_0$ или $c \in (x; x_0)$ при $x < x_0$ такая, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Итак, остаточный член в форме Лагранжа имеет вид: $R_n(x) = \dfrac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

§4. Формула Маклорена.

Выбирая $x_0 = 0$, получим частный случай формулы Тейлора, называемый *формулой Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

Формула Маклорена с остаточным членом в форме Пеано имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $c \in (0; x)$ при $x > 0$ и $c \in (x; 0)$ при $x < 0$.

§5. Представление по формуле Маклорена элементарных функций.

1. Представим экспоненту $y = e^x$ по формуле Маклорена.

$y = e^x$ $\quad$ $y(0) = 1$;
$y' = e^x$ $\quad$ $y'(0) = 1$;
…

$y^{(n)} = e^x$ $\quad$ $y^{(n)}(0) = 1$;
$y^{(n+1)} = e^x$ $\quad$ $y^{(n+1)}(c) = e^c$.

Таким образом, представление функции $y = e^x$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $c \in (0; x)$ при $x > 0$ и $c \in (x; 0)$ при $x < 0$.

а представление по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2. Представим по формуле Маклорена функцию $y = \sin x$.

$y = \sin x \qquad y(0) = 0;$

$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \qquad y'(0) = 1;$

$y'' = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}) \qquad y''(0) = 0;$

$y''' = -\cos x = \sin(x + 3\frac{\pi}{2}) \qquad y'''(0) = -1;$

$y^{IV} = \sin x = \sin(x + 4\frac{\pi}{2}) \qquad y^{IV}(0) = 0;$

...

$y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \qquad y^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right);$

$y^{(n+1)} = \sin(x + (n+1)\frac{\pi}{2}) \qquad y^{(n+1)}(0) = \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right);$

Таким образом, представление функции $y = \sin x$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

а представление по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано:

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}x^n + o(x^n).$$

3. Аналогичным образом, можно получить представление по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано функции $y = \cos x$:

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{\pi n}{2} + o(x^{n+1}).$$

4. Функция $y = \ln x$ не определена в точке $x = 0$. Поэтому вместо этого представим по формуле Маклорена функцию $y = \ln(1 + x)$.

$$y = \ln(1+x) \qquad y(0) = 0$$

$$y' = \frac{1}{1+x} \qquad y'(0) = 1$$

$$y'' = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad y''(0) = -1$$

$$y''' = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad y'''(0) = 2!$$

$$y^{IV} = -\frac{3!}{(1+x)^4} \qquad y^{IV}(0) = -3!$$

$$y^{V} = \frac{4!}{(1+x)^5} \qquad y^{V}(0) = 4!$$

...

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad y^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$y^{(n+1)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \qquad y^{(n+1)}(c) = (-1)^n \frac{n!}{(1+c)^{n+1}}\,.$$

Получаем следующее представление по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}$$

и с остаточным членом в форме Пеано:

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)\,.$$

Лекция 12

§6. Применение формулы Тейлора (Маклорена) для вычисления приближенных значений функции.

Рассмотрим конкретный пример применения формулы Тейлора для приближенного вычисления значений функции. Найдем приближенное значение числа e. Число e есть значение функции $y = e^x$ в точке $x = 1$. Используя представление экспоненты по формуле Маклорена третьего порядка, получим:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \approx 2.63\,.$$

Остаточный член в форме Лагранжа позволяет оценить погрешность этого приближения:

$R = \frac{e^c}{4!}\cdot 1 < \frac{1}{8} = 0.125$, поскольку $0 < c < 1$, а $e < 3$.

Увеличивая порядок формулы Маклорена, мы увеличим точность приближения. Так, используя формулу Маклорена пятого порядка, найдем:

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120} \approx 2.717,$$

$$R < \frac{1}{240} \approx 0.004.$$

§7. Асимптоты графиков функций.

Опр. *Асимптотой* графика функции называется прямая, расстояние ρ от которой до точки графика стремится к нулю при бесконечном удалении этой точки от начала координат (рис. 1).

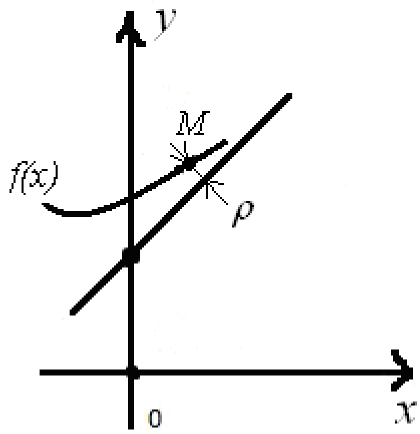


Рис. 1. Асимптота графика функции.

Замечание. Очевидно, что при бесконечном удалении точки графика от начала координат хотя бы одна из координат этой точки стремится к бесконечности. Поэтому определение асимптоты можно сформулировать и так:

Опр. *Асимптотой* графика функции называется прямая, расстояние от которой до точки графика стремится к нулю, когда одна из координат этой точки (возможно обе координаты) стремится к бесконечности.

Существует два вида асимптот: *вертикальные* и *наклонные*. Частным случаем наклонной асимптоты является горизонтальная асимптота. Изучим последовательно различные виды асимптот.

1. Вертикальная асимптота.

Опр. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то прямая $x=x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$. Пример вертикальной асимптоты представлен на рис. 2. В данном случае, $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=+\infty$, а $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=-\infty$.

Очевидно, что вертикальная асимптота удовлетворяет общему определению асимптоты: расстояние от точки графика функции $y=f(x)$ до прямой $x=x_0$ стремится к нулю при стремлении ординаты точки графика к бесконечности ($y\to\infty$).

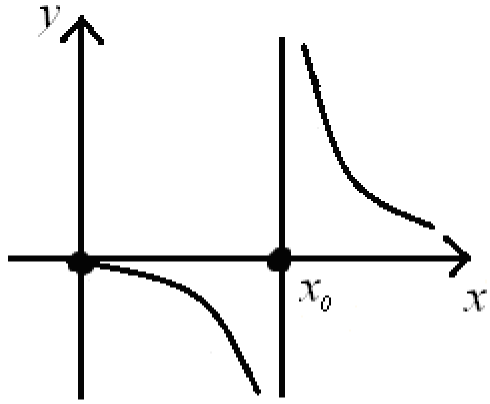


Рис. 2. Вертикальная асимптота графика.

Опр. Если $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=\infty$), то прямая $x=x_0$ называется *правосторонней (левосторонней) вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$. Правосторонняя и левосторонняя асимптоты называются односторонними, а обычная асимптота – двусторонней. Очевидно, что прямая $x=x_0$ является двусторонней асимптотой графика тогда и только тогда, когда она является как левосторонней, так и правосторонней его асимптотой.

2. Наклонная асимптота.

Опр. Если при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$) расстояние от графика функции $y=f(x)$ до прямой $y=kx+b$ стремится к нулю, то эта прямая называется *правосторонней (левосторонней) наклонной асимптотой* графика функции $y=f(x)$.

На рис. 3 приведен пример правосторонней наклонной асимптоты.

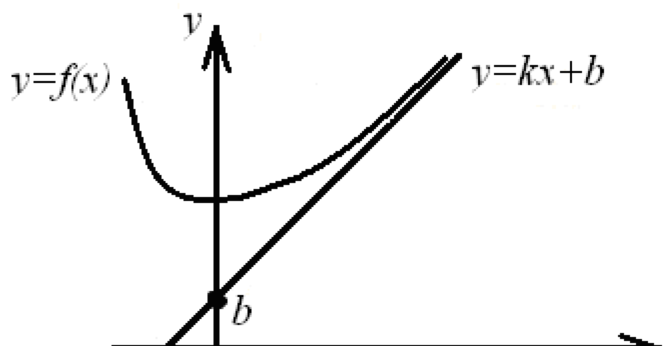


Рис. 3. Правосторонняя наклонная асимптота.

Опр. Если при $x\to\infty$ расстояние от графика функции $y=f(x)$ до прямой $y=kx+b$ стремится к нулю, то эта прямая называется *(двусторонней) наклонной асимптотой* графика функции $y=f(x)$.

Очевидно, что прямая $y=kx+b$ является двусторонней наклонной асимптотой графика тогда и только тогда, когда она является как левосторонней, так и правосторонней его асимптотой. Пример двусторонней наклонной асимптоты представлен на рис. 4.

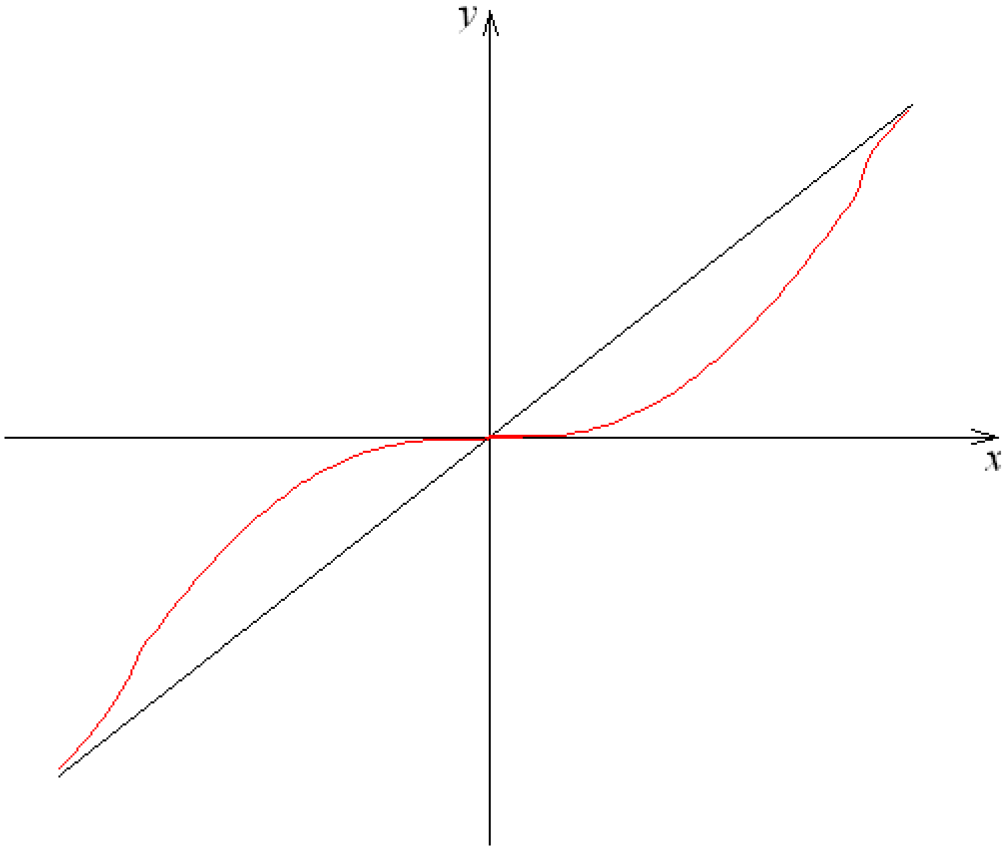


Рис. 4. Двусторонняя наклонная асимптота графика.

Пусть график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$. Найдем k и b. Обозначим через d разность ординат между точкой графика и точкой асимптоты:

$$d = f(x) - kx - b \tag{1}$$

Очевидно, что расстояние между графиком и асимптотой ρ стремится к нулю тогда и только тогда, когда $d \to 0$. Так как, по определению асимптоты $\lim\limits_{x\to\infty} \rho = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} d = 0$.

Выразим из (1) коэффициент k:

$$k = \frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} - \frac{d}{x}.$$

Переходя в обоих частях равенства к пределу при $x \to \infty$, получим:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{2}$$

Теперь найдем b. Из (1) имеем:

$$b = f(x) - kx - d,$$

или, после перехода к пределу,

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx). \tag{3}$$

Если хотя бы один из пределов (2) или (3) не существует (в частности, бесконечен), то график не имеет (двусторонней) наклонной асимптоты.

По аналогичным формулам находятся коэффициенты уравнений правосторонней и левосторонней наклонных асимптот. Так, для правосторонней наклонной асимптоты графика, имеем:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx),$$

а для левосторонней:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx).$$

Существование пары пределов k и b является необходимым и достаточным условием существования соответствующей асимптоты.

Замечание. График функции может иметь сколько угодно вертикальных асимптот, но только одну правостороннюю и только одну левостороннюю наклонную.

Опр. Если $k=0$, то наклонная асимптота (двусторонняя, левосторонняя или правосторонняя) называется *горизонтальной*.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования горизонтальной асимптоты). График функции $f(x)$ имеет двустороннюю (левостороннюю, правостороннюю) горизонтальную асимптоту тогда и только тогда, когда существует конечный предел функции $f(x)$ при $x\to\infty$ (соответственно, при $x\to-\infty$ или при $x\to+\infty$), причем, если

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=b$$

(соответственно, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$), то горизонтальная асимптота описывается уравнением

$$y=b.$$

§8. Монотонность функции на интервале.

Опр. Говорят, что функция $y=f(x)$, определенная на (a,b), монотонно *возрастает* (*убывает*) на этом интервале, если $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ таких, что $x_2>x_1$, справедливо: $f(x_2)>f(x_1)$ ($f(x_2)<f(x_1)$).

Так, на рис. 5 представлен график монотонно возрастающей функции.

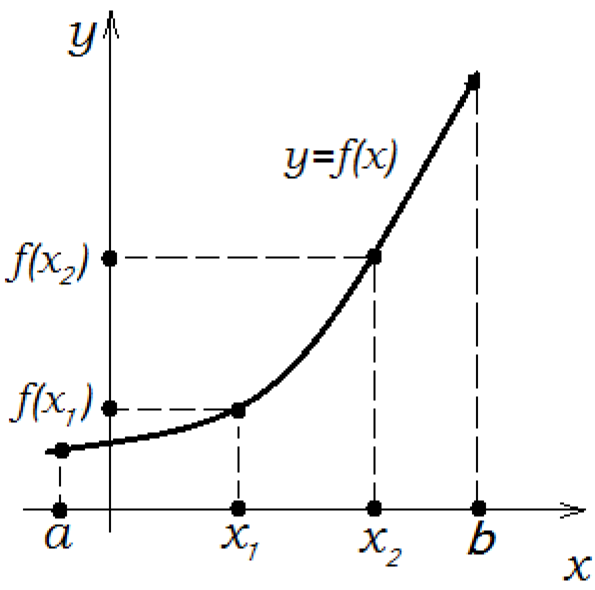


Рис. 5. Монотонно возрастающая функция.

Функция, монотонно возрастающая или убывающая на интервале (a,b), называется *монотонной* на этом интервале.

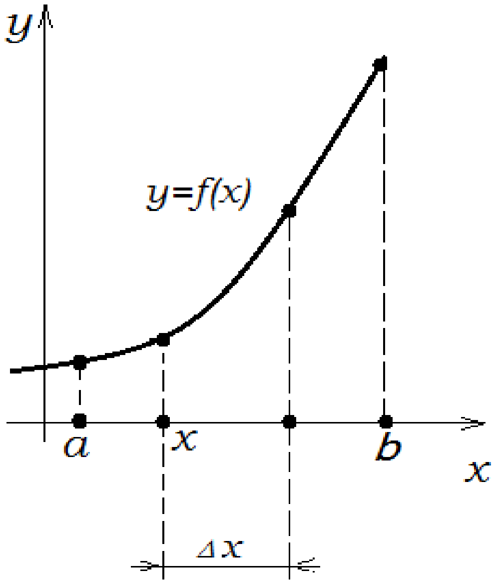


Рис. 6. Монотонно возрастающая функция.

Теорема (Необходимое условие монотонности дифференцируемой функции). Пусть функция $y = f(x)$, определенная и дифференцируемая на (a,b), монотонно возрастает (убывает) на этом интервале. Тогда $\forall x \in (a,b)$:

$$f'(x) \geq 0 \quad (f(x) \leq 0).$$

Доказательство. Проведем доказательство для случая возрастающей функции. Для убывающей функции доказательство совершенно аналогично.
Выберем произвольную точку $x \in (a,b)$. Через Δx обозначим приращение аргумента в этой точке (рис. 6), а через Δy - приращение функции $f(x)$:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Рассмотрим два случая.

1) При $\Delta x > 0$: $f(x+\Delta x) > f(x)$, т.к. функция возрастает на (a,b) $\Rightarrow$ $\Delta y > 0$ и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$.

2) При $\Delta x < 0$: $f(x+\Delta x) < f(x)$ $\Rightarrow$ $\Delta y < 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$.

Итак, в обоих случаях отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \geq 0$.

Теорема доказана.

Теорема (достаточное условие монотонности). Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на (a,b). Тогда

1) Если $\forall x \in (a,b)$ $\quad f'(x) > 0$, то $f(x)$ монотонно возрастает на (a,b).
2) Если $\forall x \in (a,b)$ $\quad f'(x) < 0$, то $f(x)$ монотонно убывает на (a,b).

Доказательство. Выберем две произвольные точки $x_1, x_2 \in (a,b)$ такие, что $x_2 > x_1$. На сегменте $[x_1, x_2]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа: она непрерывна на этом сегменте и дифференцируема на (x_1, x_2).

По теореме Лагранжа $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$ и знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ определяется знаком производной $f'(c)$.

1) Пусть $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$. Тогда $f'(c) > 0$. следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т.е. $f(x_2) > f(x_1)$.

Итак, для произвольные точек $x_1, x_2 \in (a,b)$, таких, что $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Последнее означает, что $f(x)$ монотонно возрастает на интервале (a,b).

2) Пусть теперь $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$. Тогда $f'(c) < 0$, $f(x_2) - f(x_1) < 0$ и $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, функция $f(x)$ монотонно убывает на (a,b).

Теорема доказана.

§9. Экстремум функции.

Опр. Пусть функция $y = f(x)$ определена на (a,b), а $x_0 \in (a,b)$. Тогда

1) Если $\exists \dot{u}(x_0): \forall x \in \dot{u}(x_0) \quad f(x) < f(x_0)$, то x_0 называется *точкой локального максимума* функции $f(x)$, а $f(x_0)$ – *максимумом* этой функции.

2) Если $\exists \dot{u}(x_0): \quad \forall x \in \dot{u}(x_0) \quad f(x) > f(x_0)$, то x_0 называется *точкой локального минимума* функции $f(x)$, а $f(x_0)$ – *минимумом* этой функции.

Точки минимума и максимума называются *точками локального экстремума* а минимум и максимум функции – *экстремумами* функции.

В качестве примера, на рис 7 представлена точка минимума.

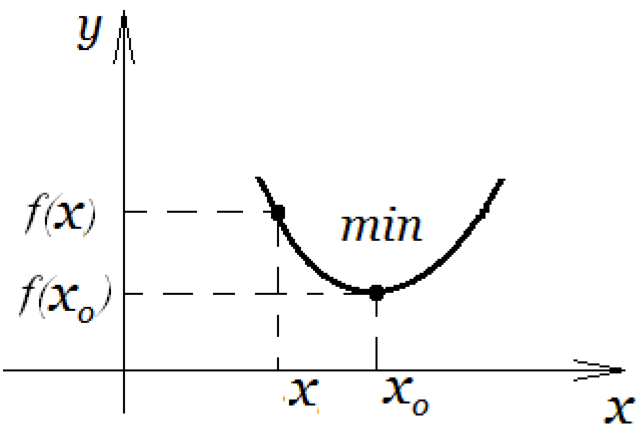


Рис. 7. Точка минимума функции.

§10. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции

Теорема (необходимое условие существования экстремума). Если функция $y = f(x)$, дифференцируемая в точке x_0, имеет в этой точке экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю:

$$f'(x_0) = 0$$

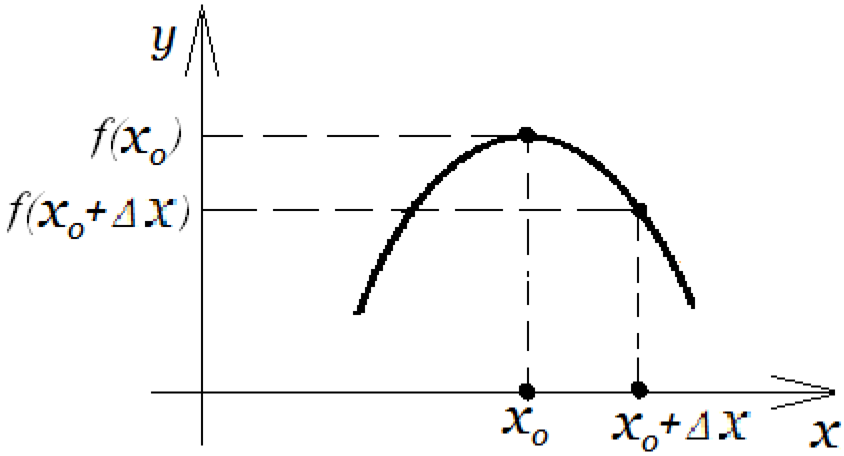


Рис. 8. Точка локального максимума.

Доказательство. Пусть, для определенности, x_0 - точка максимума (рис. 8). Обозначим через Δx приращение аргумента в точке x_0, а через Δy - соответствующее приращение функции.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\Delta x > 0$. Т.к. x_0 – точка максимума, то $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ и

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0.$$

2) Пусть $\Delta x < 0$. Т.к. x_0 – точка максимума, то по-прежнему

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \Rightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0.$$

Поскольку, по условию теоремы, функция $f(x)$ имеет (конечную) производную в точке x_0, то существует двусторонний предел

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

но, как известно, это возможно только в том случае, если существуют оба соответствующих односторонних предела и они равны. При этом двусторонний предел равен односторонним:

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Однако, из полученных неравенств для односторонних пределов очевидно, что они могут быть равны тогда и только тогда, когда они оба равны нулю. Следовательно, нулю равен и двусторонний предел, т.е. $y'(x_0)$:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

В случае, когда x_0 – точка минимума, доказательство проводится аналогично.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим функцию $y = x^2$. Очевидно, точка $x = 0$ является точкой минимума данной функции (рис. 9). При этом $y' = 2x$ и $y'(0) = 0$.

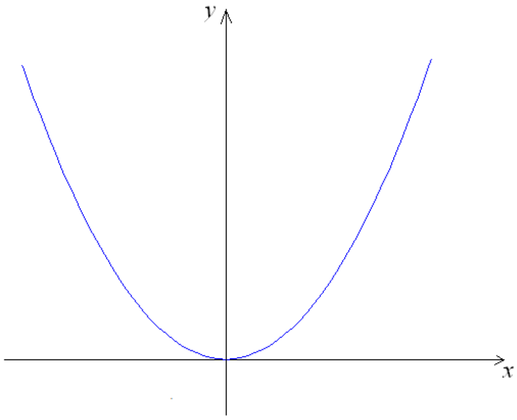


Рис. 9. График функции $y = x^2$.

Замечание. Доказанная теорема является необходимым, но не достаточным условием экстремума дифференцируемой функции: из того что $f'(x_0) = 0$ еще не следует, что x_0 – точка экстремума.

Пример. $y = x^3$, $y' = 3x^2$; $y'(0) = 0$, но точка $x = 0$, очевидно не является точкой экстремума данной функции (рис. 10).

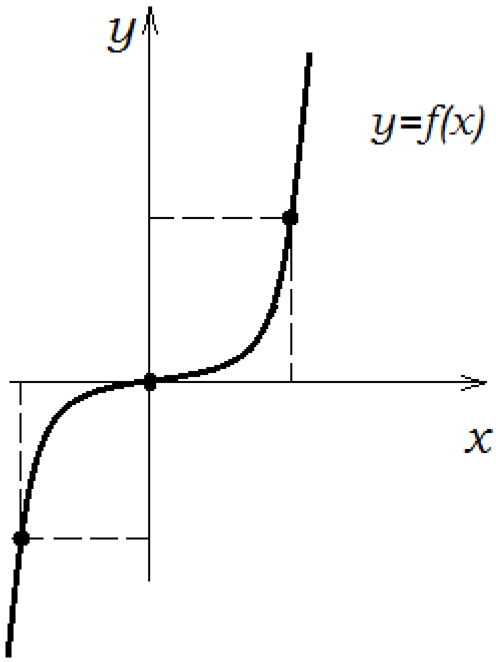


Рис. 10. График функции $y = x^3$.

Опр. Точки, в которых производная функции обращается в ноль называются *стационарными точками* данной функции (для данной функции).

§11. Экстремумы функции в точках недифференцируемости.

Итак, дифференцируемая в точке x_0 функция может иметь в этой точке экстремум только в том случае, если $f'(x_0) = 0$. Однако, функция может иметь экстремум в точке x_0

и в том случае, если она недифференцируема в этой точке (т.е. не имеет в ней производной).

Пример. Рассмотрим функцию $y=|x|$. График этой функции представлен на рис. 11. Очевидно, что точка $x=0-$ точка минимума. Однако, в этой точке не существует ни конечной, ни бесконечной производной функции $y'(0+)=1$, $y'(0-)=-1$, т.е. $y'(0+)\neq y'(0-)$.

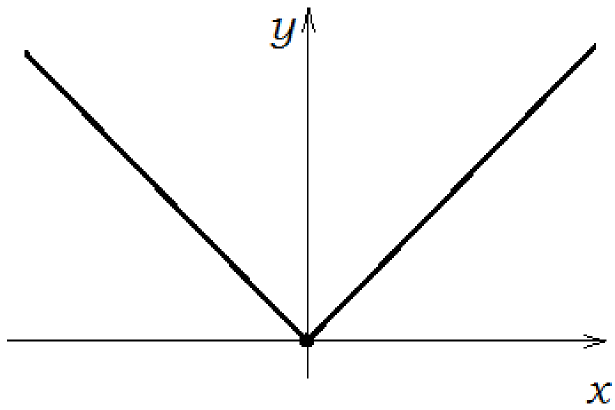


Рис. 11. График функции $y=|x|$.

Пример. Функция $y=x^{2/3}$, очевидно, имеет минимум в точке $x=0$ (рис. 12). Производная этой функции $y'=\dfrac{2}{3}x^{-1/3}$ и $y'(0)=\infty$.

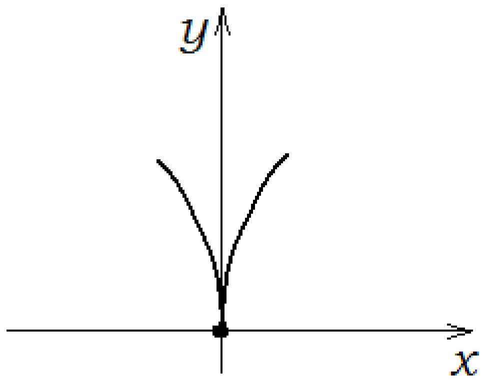


Рис. 12. График функции $y=x^{2/3}$.

Итак, функция $y=f(x)$ может иметь экстремум в точке x_0 только в 2-х случаях:

1) $f'(x_0)=0$

2) $f'(x_0)-\nexists$ (в частности, $f'(x_0)=\infty$).

В первом случае, график функции в точке экстремума гладкий (рис. 9) и касательная к нему параллельна оси абсцисс, либо совпадает с ней (гладкий экстремум). Во втором случае (рис. 11, 12), график в точке экстремума не гладкий (острый экстремум), причем, если $f'(x_0)=\infty$, то касательная к нему параллельна оси ординат, либо совпадает с ней (рис. 12).

Однако выполнение одного из приведенных условий еще не значит, что в точке x_0 имеется экстремум (это необходимые условия, а не достаточные). Пример отсутствия экстремума для случая $f'(x_0)=0$ был рассмотрен выше (рис. 10). Рассмотрим пример отсутствия экстремума в случае, когда $f'(x_0)-\nexists$.

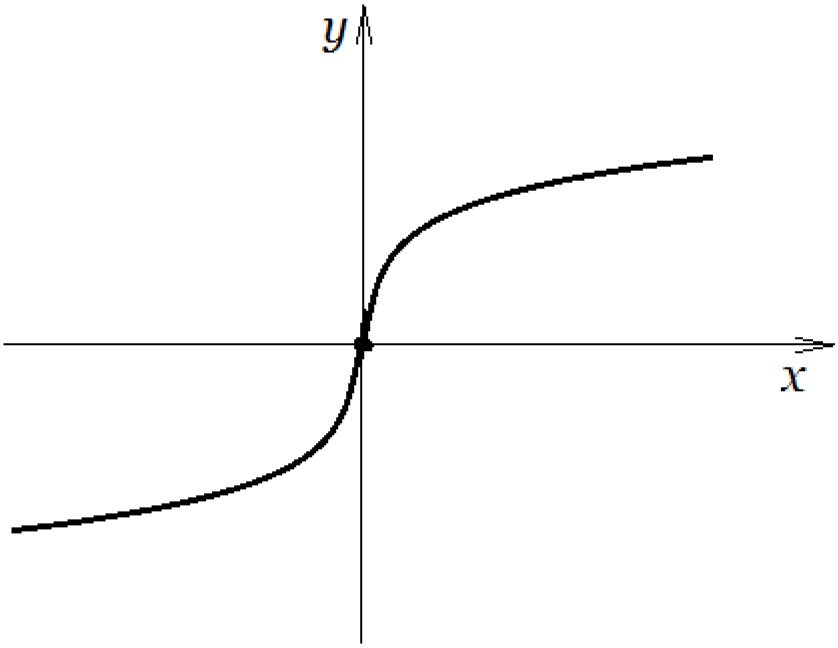


Рис. 13. График функции $y=\sqrt[3]{x}$.

Пример. Функция $y=\sqrt[3]{x}$, очевидно, не имеет экстремума в точке $x=0$ (рис. 13). Однако ее производная в этой точке не существует: $y'=\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$, $y'(0)=\infty$.

Опр. Точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю или не существует, называется *критическим точками* этой функции.

§12. Первый достаточный признак локального экстремума.

Теорема. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в проколотой окрестности $\dot{u}(x_0)$ точки x_0 и непрерывна в $u(x_0)$. Тогда, если производная данной функции меняет знак при прохождении через точку x_0, то x_0 – точка экстремума, причем:

1) если при $x<x_0$ $f'(x)>0$, а при $x>x_0$ $f'(x)<0$, то x_0 – точка максимума;
2) если при $x<x_0$ $f'(x)<0$, а при $x>x_0$ $f'(x)>0$, то x_0 – точка минимума.

Доказательство. Проведем доказательство для точки максимума. В случае точки минимума оно аналогично. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x>x_0$ (рис. 14).

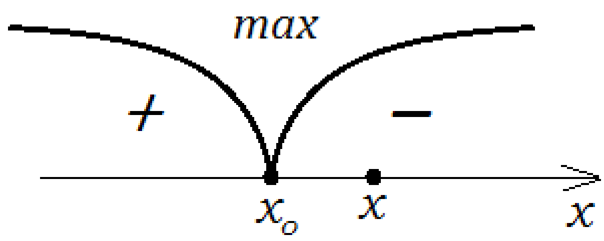


Рис. 14. Диаграмма знакопостоянства производной $f'(x)$.

На $\left[x_0, x\right]$ выполняются условия теоремы Лагранжа. По теореме Лагранжа

$$\exists c \in \left(x_0, x\right):\ f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0)$$

Т.к.

$x - x_0 > 0$ и $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0, x)$, а значит $f'(c) < 0$,

то

$f(x) - f(x_0) < 0$ и $f(x) < f(x_0)$.

2) Пусть $x < x_0$ (рис. 15).

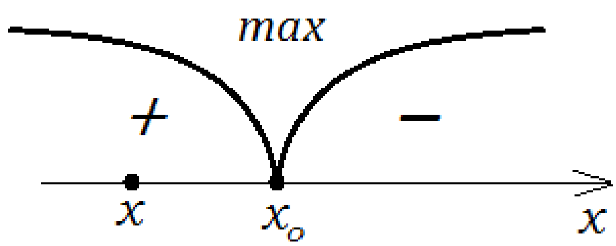


Рис. 15. Диаграмма знакопостоянства производной $f'(x)$.

На $\left[x, x_0\right]$ $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. По теореме Лагранжа

$\exists c \in (x, x_0)$**:** $f(x_0) - f(x) = f'(c) \cdot (x_0 - x)$**.**

Т.к. $x_0 - x > 0$, и $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x, x_0)$, а значит $f'(c) > 0$,

то

$f(x_0) - f(x) > 0$ и $f(x) < f(x_0)$.

Таким образом, как в левосторонней, так и в правосторонней окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

Следовательно, x_0 – точка максимума.

Теорема доказана.

§13. Второй достаточный признак локального экстремума.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0 и пусть $f'(x_0) = 0$. Тогда

1) Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума.

2) Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка минимума.

Доказательство. Представим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора 2-го порядка в окрестности точки x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)^2 + f''(x_0)\cdot(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Так как $f'(x_0) = 0$, то

$$f(x) - f(x_0) = f''(x_0)\cdot(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

В достаточно малой окрестности точки x_0 остаточный член пренебрежимо мал по сравнению с первым слагаемым в правой части равенства и знак правой части равенства определяется первым слагаемым, поэтому :

1) Если $f''(x_0) < 0$, то $f(x) - f(x_0) < 0$ в достаточно малой окрестности $u(x_0)$ и

$f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in u(x_0)$. Следовательно, x_0 – точка локального максимума.

2) Если $f''(x_0) > 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0$ в достаточно малой окрестности $u(x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in u(x_0)$ и x_0 – точка минимума.

Теорема доказана.

Замечание. Если $f''(x_0) = 0$, то второй достаточный признак не позволяет исследовать функцию на экстремум.

§14. Схема исследования функций на возрастание и убывание.

Для нахождения экстремумов функции и исследования функции на возрастание и убывание, необходимо выполнить следующую последовательность действий.

1. Найдем $f'(x)$.

2. Найдем точки x_0, в которых производная функции обращается в ноль: $f'(x_0) = 0$. Такие точки называются стационарными точками.

3. Найдем точки x_0, в которых производная функции не существует (в частности, равна бесконечности): $f'(x_0) - \nexists$. Такие точки, как и стационарные точки называются *критическими точками*. Критические точки – это потенциальные точки экстремума (при условии, что сама функция в них определена).

4. Разобьем область определения функции $y = f(x)$ на интервалы критическими точками и точками разрыва (изображаются пустыми кружочками) и определим знак первой производной на каждом интервале (рис. 16).

Рис. 16. Интервалы знакопостоянства производной.

5. Используя первый достаточный признак экстремума, выясним, какие из критических точек являются точками экстремума.

6. Найдем значения функции в точках экстремума.

Пример. Исследуем на экстремум функцию $y = x\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Производная равна

$$y' = \frac{5\left(x - \frac{3}{5}\right)}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

Критические точки:

$$x = \frac{3}{5} \quad (y' = 0), \ \ x = 1 \quad (y' = \infty).$$

Ниже приведена диаграмма знакопостоянства производной (рис. 17). При больших x производная, очевидно, положительна, при прохождении через точку x=1 она меняет знак за счет знаменателя, при прохождении через точку x=3/5 – за счет числителя.

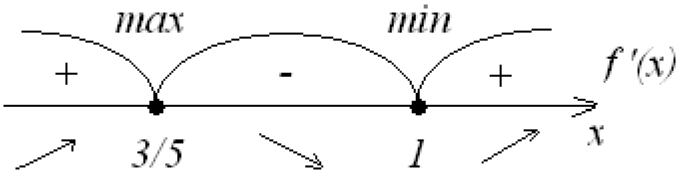


Рис. 17. Интервалы знакопостоянства производной функции
$y = x \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Таким образом, $x = \frac{3}{5}$ – точка гладкого максимума, а $x = 1$ в – точка острого минимума. Т.к. $y'(1) = \infty$, график функции входит и выходит из этой точке по касательной к прямой $x = 1$, параллельной оси ординат.

Значения функции в точках экстремума: $y\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$, $y(1) = 0$.

На рис. 18 представлен эскиз графика функции $y = x \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

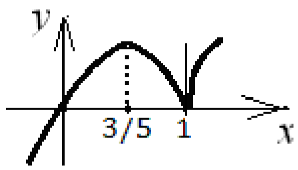


Рис. 18. Эскиз графика функции $y = x \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Лекция 13

§1. Направления выпуклости графика функции.

Вспомним, что кривая называется *гладкой,* если она в каждой точке имеет касательную. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), то ее график является гладкой кривой на этом интервале.

Опр. Говорят, что график функции, дифференцируемой на (a,b), является *выпуклым (выпуклым вверх)* на интервале (a,b), если касательная к нему в любой точке из этого интервала лежит выше графика.

Опр. Говорят, что график функции, дифференцируемой на (a,b), является *вогнутым (выпуклым вниз)* на интервале (a,b), если касательная к нему в любой точке из этого интервала лежит ниже графика.

Так, график, представленный на рис. 1, является выпуклым.

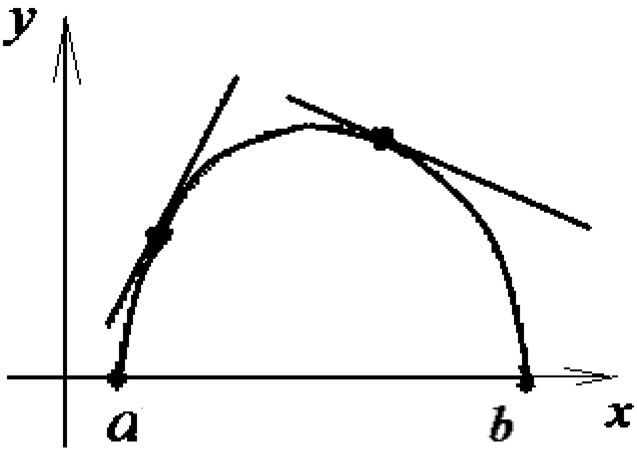


Рис. 1. Пример выпуклого графика.

Опр. *Точкой перегиба* называется точка графика функции, при прохождении через которую меняется направление выпуклости графика (с выпуклости на вогнутость, или наоборот).

Пример точки перегиба представлен на рис. 2.

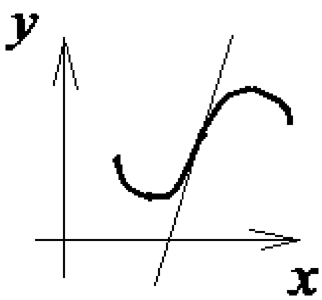


Рис. 2. Точка перегиба графика функции.

В точке пергиба касательная пересекает график.

§2. Достаточное условие выпуклости графика функции.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на (a,b) (т.е. $\forall x \in (a,b) \exists f''(x)$). Тогда

1) Если $\forall x \in (a,b): f''(x) < 0$, то график функции $y = f(x)$ *выпуклый* на (a,b).

2) Если $\forall x \in (a,b): f''(x) > 0$, то график функции $y = f(x)$ *вогнутый* на (a,b).

Доказательство. Покажем, что при $f''(x) < 0 \;\; \forall x \in (a,b)$ касательная лежит выше графика функции, т.е. ордината любой точки касательной $\overline{y}$ больше ординаты соответствующей точки графика $f(x)$: $\overline{y} > f(x)$, а при $f''(x) > 0$ – наоборот.

Запишем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в произвольной точке $x_0 \in (a,b)$:

$$\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

или

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Разность ординат точки касательной и точки графика равна:

$$\bar{y} - f(x) = f(x_0) - f(x) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Пусть, для определенности, $x > x_0$. Функция $f(x)$ на $[x_0, x]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. По теореме Лагранжа, $\exists c \in (x_0, x): f(x) - f(x_0) = f'(c)\cdot(x - x_0)$. Следовательно,

$$\bar{y} - f(x) = -f'(c)\cdot(x - x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

или

$$\bar{y} - f(x) = (x - x_0)\cdot(f'(x_0) - f'(c)).$$

Поскольку $x > x_0$ и $c \in (x_0, x)$, то $c > x_0$. Функция $f'(x)$ на $[x_0, c]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. По теореме Лагранжа $\exists c_1 \in (x_0, c): f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)\cdot(c - x_0) \Rightarrow$

$$\bar{y} - f(x) = -(x - x_0)\cdot(c - x_0) f''(c_1)$$

Поскольку $x > x_0$ и $c > x_0$, то $(x - x_0)\cdot(c - x_0) > 0$.

К тому же результату придем и в случае $x < x_0$ и(использовав теорему Лагранжа на сегменте $[x, x_0]$).

Теперь рассмотрим по отдельности два случая.

1) Если, $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$, то $\bar{y} - f(x) > 0$, т.е. $\bar{y} > f(x)$, т.е. касательная лежит выше графика и график выпуклый.

2) Если, $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$, то $\bar{y} - f(x) < 0$, т.е. $\bar{y} < f(x)$, т.е. касательная лежит ниже графика и график вогнутый.

Теорема доказана.

§3. Точки перегиба графика.

Теорема (необходимое условие точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную 2-ую производную и точка $M(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика функции $y = f(x)$. Тогда $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Проведем доказательство от противного.

Допустим, что $f''(x_0) > 0$ (рис.3 *а*). В силу непрерывности 2-ой производной в точке x_0, существует окрестность $u(x_0)$ этой точки такая, что внутри $u(x_0)$ $f''(x) > 0$, а значит график функции является выпуклым, следовательно x_0 не может быть точкой перегиба, что противоречит условию теоремы.

Допустим теперь, что $f''(x_0) < 0$ (рис.3 *б*). В силу непрерывности 2-ой производной в точке x_0, существует окрестность $u(x_0)$ этой точки такая, что внутри $u(x_0)$ $f''(x) < 0$, а значит график функции является вогнутым, следовательно x_0 опять же не может быть точкой перегиба, что противоречит условию теоремы.

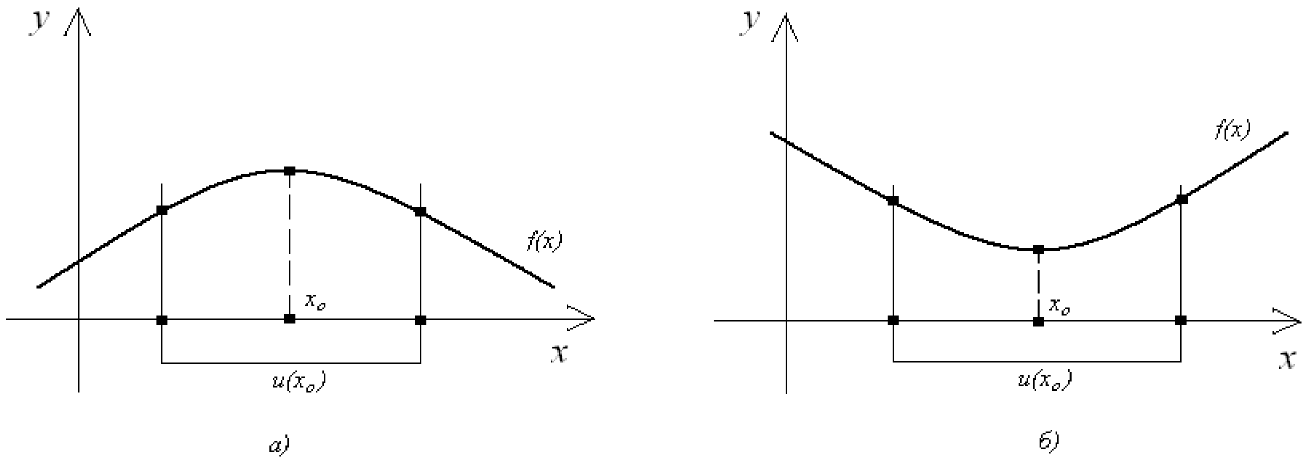


Рис. 3. Иллюстрация к необходимому условию точки перегиба.

Поскольку $f''(x_0)$ не положительна и не отрицательна, но все же существует, то $f''(x_0) = 0$.

Теорема доказана.

Пример. Функция $y = x^3$ имеет точку перегиба $x = 0, y = 0$. Вторая производная этой функции $y'' = 6x$, так что $y''(0) = 0$.

Замечание. Доказанная теорема выражает необходимое, но не достаточное условие точки перегиба. Т.е. из равенства $f''(x_0) = 0$ еще не следует, что x_0 – точка перегиба графика.

Замечание. Если функция не имеет непрерывной второй производной в точке x_0, эта точка, все же может быть точкой перегиба графика.

Пример. Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$; $y' = \dfrac{1}{3}x^{-2/3}$; $y'' = -\dfrac{2}{9}x^{-5/3}$.

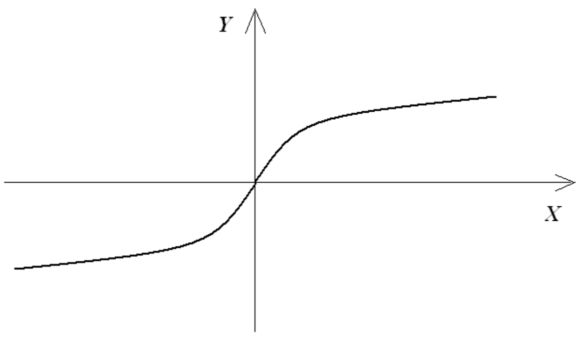


Рис. 4. График функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Вторая производная не существует (равна бесконечности) при $x = 0$. График функции представлен на рис. 4. Очевидно, что точка $(0, 0)$ – точка перегиба графика.

Таким образом, в точке перегиба $f''(x)$ либо равна нулю, либо не существует.

Опр. Точки x_k, в которых $f''(x)$ равна нулю или не существует (в частности, бесконечна) называются *критическими точками 2-го рода.*

Теорема (достаточное условие точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0, $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует (в частности, бесконечна) и при прохождении через точку x_0 $f''(x)$ меняет знак, то $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика.

Доказательство. Пусть, для определенности, $f''(x)$ при прохождении через точку x_0 меняет знак с “+” на “-“ (рис. 5), т.е.

$$f''(x) > 0 \text{ при } x < x_0$$

$$f''(x) < 0 \text{ при } x > x_0.$$

Тогда при $x < x_0$ график функции $f(x)$ является вогнутым, а при $x > x_0$ – выпуклым. Следовательно $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика функции.

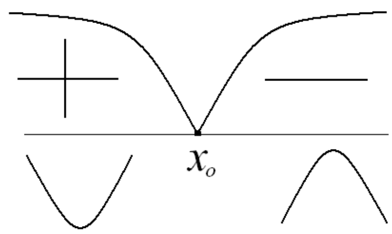


Рис. 5. Интервалы знакопостоянства второй производной

Аналогично, если $f''(x)$ при прохождении через т. x_0 меняет знак с “-“ на “+”, то слева от точки x_0 график является выпуклым, а справа – вогнутым. Следовательно, $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба.

§4.Схема исследования функции на выпуклость и вогнутость.

Для определения интервалов выпуклости и вогнутости графика функции $y = f(x)$ и нахождения точек перегиба, необходимо выполнить следующие действия.

1) Найдем $f''(x)$.
2) Найдем все точки x_k, в которых $f''(x_k) = 0$.
3) Найдем все точки x_k, в которых не существует $f''(x_k)$ (в частности, бесконечна).
4) Разделим область определения функции $y = f(x)$ найденными точками, а также точками, в которых не определена сама функция на интервалы знакопостоянства второй

производной. Определим на каждом из этих интервалов направления выпуклости графика (выпуклый график или вогнутый).
5) По изменению направления выпуклости (используя достаточное условие точки перегиба), найдем точки перегиба графика.

Замечание. По определению, точка перегиба – это точка графика функции, т.е. функция в ней определена. Направление же выпуклости графика может меняться и при прохождении через точку, в которой функция не определена (например, через вертикальную асимптоту). При таком изменении направления выпуклости, точка перегиба отсутствует.

Пример. Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x+3}$.

$y'' = -\frac{2}{9}(x+3)^{-\frac{5}{3}}$; $y''(-3) = \infty$ (не существует).

На рис. 6 представлена диаграмма знакопостоянства второй производной и указаны направления выпуклости графика функции.

Очевидно, точка $x = -3$, $y = 0$ является точкой перегиба графика.

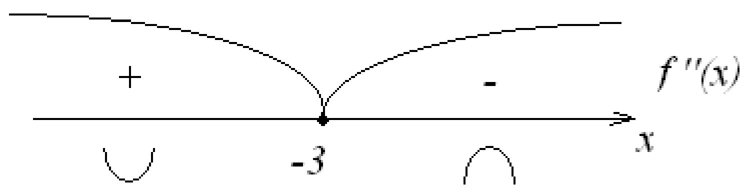


Рис. 6. Диаграмма знакопостоянства второй производной функции $y = \sqrt[3]{x+3}$.

§5. Схема полного исследования функции и построения ее графика.

Для того, чтобы провести полное аналитическое исследование функции и построить ее график, необходимо выполнить следующие действия.

I. Элементарное исследование.

1) Найти область определения функции $f(x)$.

2) Найти точки пересечения графика с координатными осями и интервалы знакопостоянства функции.

3) Исследовать функцию на четность и периодичность.

4) Исследовать функцию на непрерывность и найти точки разрыва.

II. Асимптоты и поведение на границах области определения.

5) Найти вертикальные асимптоты графика и исследовать поведение функции вблизи асимптот.

6) Найти наклонные (горизонтальные) асимптоты графика.

7) В случае, если область определения имеет границы (например, область определения – отрезок), вместо наклонных асимптот найти значения (пределы) функции в граничных точках.

7) Построить эскиз графика по асимптотам (рекомендуется).

III. Исследование по первой производной.

8) Провести исследование функции возрастание и убывание, найти точки экстремума.

IV. Исследование по второй производной.

9) Найти направления выпуклости и точки перегиба графика.

V. График функции.

10) Построить график функции.
11) Найти область значений функции.

Пример. Построим график функции

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

I. Элементарное исследование.

Область определения функции: $x \neq 1$ ($x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$).

Координатные оси график пересекает в единственной точке: $x = 0; y = 0$.

Интервалы знакопостоянства функции представлены на рис. 7.

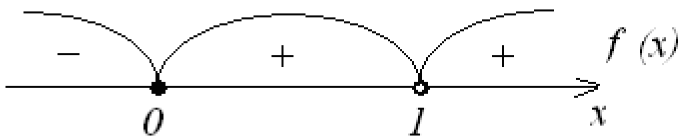


Рис. 7. Интервалы знакопостоянства функции.

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

Очевидно, рассматриваемая функция общего вида и не периодична.

Единственная точка разрыва функции: $x = 1$ – это точка разрыва 2-го рода (∞-го разрыва).

II. Асимптоты.

а) Наклонная асимптота.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2.$$

Таким образом, график имеет двустороннюю наклонную асимптоту: $y = x + 2$.

б) Вертикальная асимптота.

График имеет двустороннюю вертикальную асимптоту: $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1-} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = +\infty \ ;$$

Эскиз графика по асимптотам представлен на рис. 8.

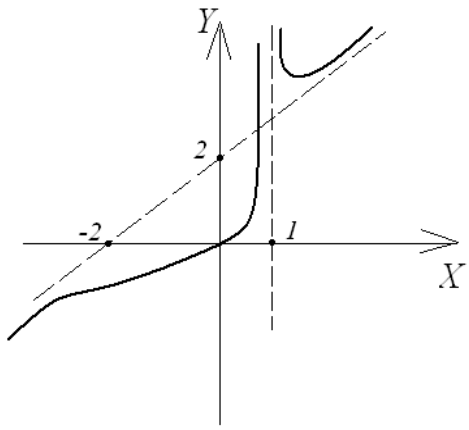


Рис. 8. Эскиз графика функции $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ по асимптотам.

III. Исследование по первой производной.

$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

$y' = 0$
в двух точках: x=0 и x=3.
$y' = \infty$ в единственной точке: $x = 1$. Однако, эта точка не может быть точкой экстремума, так как в ней не определена сама функция. Интервалы знакопостоянства первой производной представлены на рис. 9 Стрелками указаны возрастание и убывание функции на соответствующих интервалах.

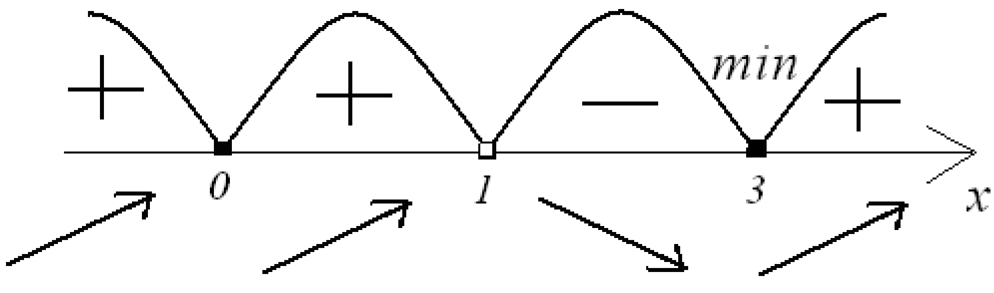


Рис. 9. Интервалы знакопостоянства производной функции

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

Очевидно, функция имеет точку гладкого минимума $x = 3, y = \frac{27}{4}$. Других экстремумов нет.

IV. Исследование по второй производной.

$$y'' = \left(\frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}\right)' = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^6} = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1) - 3(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

.

$y'' = 0 \iff x = 0$

$y'' - \nexists (= \infty) \iff x = 1$, то это точка разрыва.

Диаграмма знакопостоянства второй производной представлена на рис 10. Дугами показаны направления выпуклости графика.

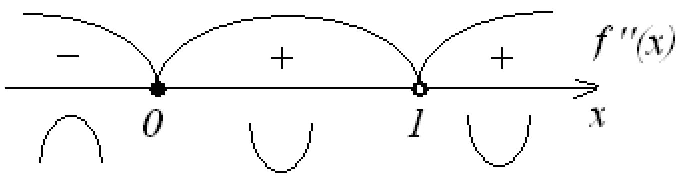


Рис. 10. Диаграмма знакопостоянства второй производной функции

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

График имеет единственную точку перегиба
$x = 0, y = 0.$

x	$(-\infty, 0)$	0	(0,1)	1	(1,3)	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	+	$\nexists$	-	0	+
y''	-	0	+	$\nexists$	+	+	+
y	- ↑ ∩	Точка перегиба, $y = 0$	+ ↑ ∪	$\nexists$	+ ↓ ∪	+ min $y = \frac{27}{4} \approx 7$	+ ↑ ∪

Результаты исследования удобно представлять в виде таблицы.

На рис.11 представлен график функции, построенный по результатам исследований.

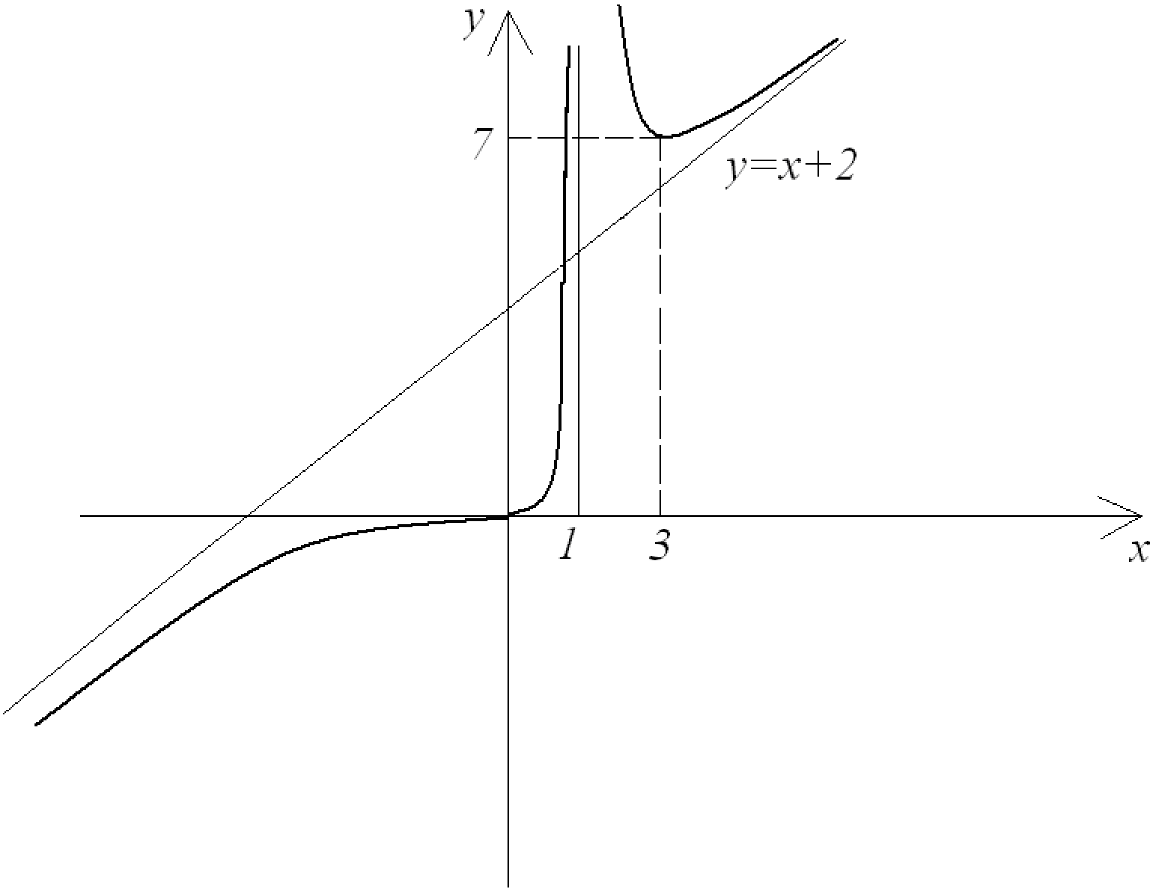


Рис 11. Графика функции $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

По графику очевидно, что область значений функции: $y \in R$.

Лекция 14

§1. Способы задания кривой на плоскости и в пространстве.

I. На плоскости.

1) Кривая на плоскости может быть задана как график функции в декартовой системе координат, т.е. уравнением

$y = f(x)$, $x \in [a,b]$.

Пример. Уравнение $y=\sqrt{a^2 - x^2}$, как известно, описывает верхнюю половинку окружности с центром в начале координат радиусом a.

2) Параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

3) В полярных координатах.

Как известно, в декартовой системе координат, любая точка на плоскости взаимнооднозначно задается парой чисел (x, y). Описать точку парой чисел можно и по другому. Зададим начало координат (O) на плоскости и одну ось (ρ), называемую *полярной осью*. *Полярными координатами* точки на плоскости (рис. 1) назовем пару чисел (φ, ρ), где φ – угол, составляемый радиус-вектором точки с направлением полярной оси (*полярный угол*), а ρ – длина радиус-вектора точки, т.е. расстояние от точки до начала координат (*полярный радиус*). Так же как и декартовы координаты, полярные координаты задают точку на плоскости взаимнооднозначно.

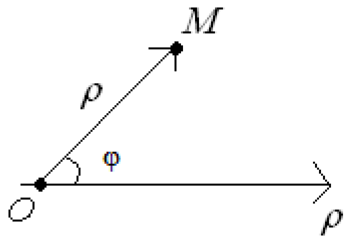


Рис. 1. Полярные координаты точки на плоскости.

Положительным направлением отсчета полярного угла считается направление против часовой стрелки.

Для того, чтобы установить связь полярных координат с декартовыми, направим ось абсцисс вдоль полярной оси. Тогда полярный угол – это угол, составляемый радиус-вектором точки с осью абсцисс (рис. 2).

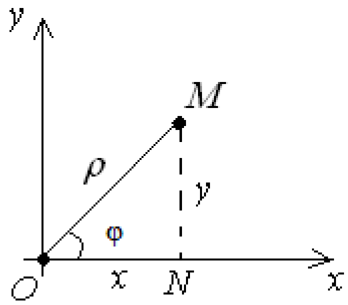


Рис. 2. Связь полярных координат с декартовыми.

Из прямоугольного треугольника ONM нетрудно видеть, что полярные и декартовы координаты связаны следующими формулами:

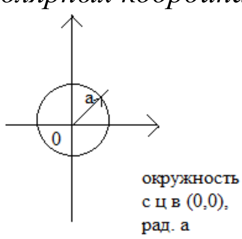
$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

Кривая в полярных координатах задается уравнением

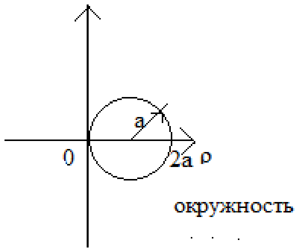
$$\rho = R(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta].$$

Ниже приведены наиболее часто используемые кривые в полярных координатах. В ряде случаев, указано также их уравнение в декартовых координатах.

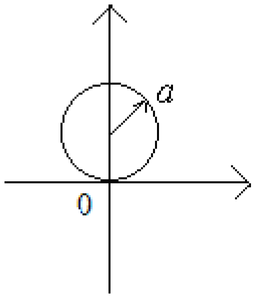
Кривые в полярных координатах



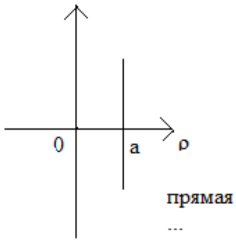
1) $x^2 + y^2 = a^2$ $\rho = a$



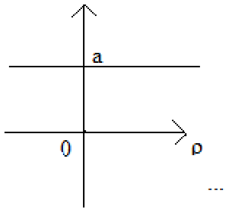
2) $(x-a)^2+y^2=a^2$ $\qquad\qquad \rho = 2a\cos\varphi$



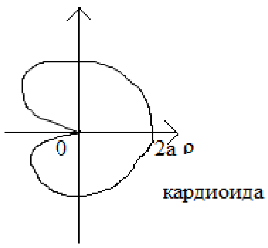
3) $x^2+(y-a)^2=a^2$ $\qquad\qquad \rho = 2a\sin\varphi$



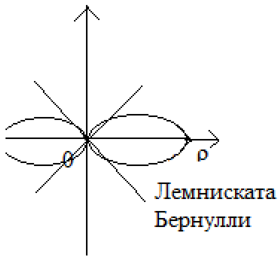
4) $x=a$ $\qquad\qquad \rho = \dfrac{a}{\cos\varphi}$



5) $y=a$ $\qquad\qquad \rho = \dfrac{a}{\sin\varphi}$



6) $\qquad\qquad \rho = a(1+\cos\varphi)$



10) $\qquad\qquad \rho^2 = a^2\cos 2\varphi$

II. В пространстве.

1) Кривая в пространстве может быть задана, как линия пересечения двух поверхностей:

$$\begin{cases} z = f_1(x,y) \\ z = f_2(x,y) \end{cases}.$$

2) Параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t),\ t \in [\alpha, \beta]. \\ z = \varphi_3(t) \end{cases}$$

Пример. Уравнения

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t,\ t \geq 0 \\ z = t \end{cases}$$

задают круговую спираль, вьющуюся вокруг оси Oz. Действительно, первая пара уравнений задает окружность на плоскости xOy, но переменная z монотонно возрастает с ростом t.

§2. Дифференциал длины дуги кривой.

Пусть задана гладкая кривая на плоскости, ограниченная точками A и B. Введем определение длины этой кривой. Для этого разобьем кривую точками M_1, M_2,…, M_n на множество частей и построим ломаную $AM_1M_2...M_nB$.

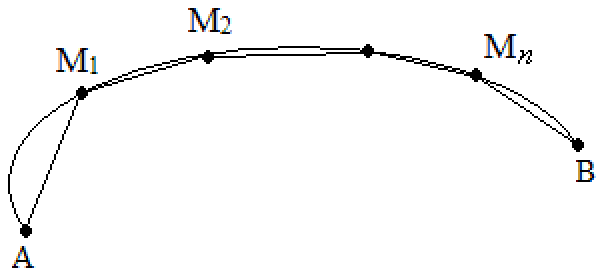


Рис. 3. Приближение дуги ломаной.

Очевидно, что чем мельче будет разбиение – тем больше ломаная будет сливаться с кривой и тем меньше периметр ломаной (т.е. сумма длин ее звеньев) будет отличаться от длины дуги $\overset{\frown}{AB}$.

Опр. Длиной дуги гладкой кривой l называется предельное значение периметра L ломаной $AM_1M_2...M_nB$ при стремлении длины максимального из ее звеньев к нулю:

$$l = \lim_{d \to 0} L.$$

Аналогично определяется и длина дуги пространственной кривой.

Теорема. Предел отношения длины дуги гладкой кривой Δl к длине стягивающей ее хорды Δs (рис. 4) при стремлении последней к нулю равен единице:

$$\lim_{s \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta s} = 1$$

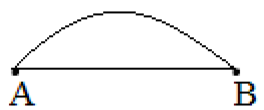


Рис. 4. Иллюстрация к теореме об эквивалентности дины дуги длине стягивающей ее хорды.

Другими словами, $\Delta l \sim \Delta s$ при $\Delta s \to 0$.

Рассмотрим кривую на плоскости, заданную уравнением $y = f(x)$.

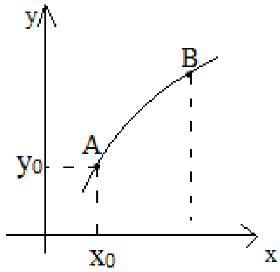


Рис. 5. Длина дуги кривой, как функция переменной x.

Пусть A – фиксированная точка этой кривой: $A(x_0, y_0)$, а точка $B(x, y)$ может свободно перемещаться вдоль кривой (рис. 5). Тогда длина дуги кривой AB является функцией абсциссы x точки B:

$$l = l(x).$$

Поставим задачу вычисления производной и дифференциала этой функции. Рассмотрим, для начала случай, когда кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t \in [\alpha, \beta].$$

Тогда длина дуги является функцией параметра t. Найдем производную $\frac{dl}{dt}$. Т.к. длина дуги дуги кривой эквивалентна длине стягивающей ее хорды, при стремлении последней к нулю: $\Delta l \sim \Delta s$ при $\Delta s \to 0$,

$$\frac{dl}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

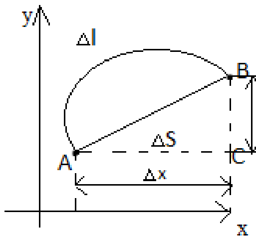


Рис. 6. Иллюстрация к вычислению производной длины дуги.

Из прямоугольного ΔABC на рис. 6 видим, что

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

следовательно

$$\frac{dl}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}.$$

По теореме о переходе к пределу под знаком непрерывной функции, получим искомую формулу для производной длины дуги:

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\dot{x}_t^{\,2} + \dot{y}_t^{\,2}},$$

где точками обозначены производные функций $x(t)$ и $y(t)$ по переменной t. Формула для дифференциала длины дуги имеет вид

$$dl = \sqrt{\dot{x}_t^{\,2} + \dot{y}_t^{\,2}}\,dt.$$

Внося dt под знак корня и сокращая на dt^2, можно записать также эту формулу в виде

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Вернемся теперь к случаю, когда кривая является графиком функции $y = f(x)$. Полагая $t = x$, получим: $\dot{x}_t = 1$, $\dot{y}_t = f'(x)$,

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}.$$

$$dl = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Наконец, рассмотрим случай, когда кривая задана в полярных координатах:

$\rho = r(\varphi)$.

Декартовы координаты произвольной точки на кривой задаются равенствами:

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}.$$

Эти равенства можно рассматривать как параметрические уравнения кривой с параметром $t = \varphi$. Имеем:

$$dl = \sqrt{(x_\varphi')^2 + (y_\varphi')^2}\,d\varphi,$$

$$x_\varphi' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi \;\Rightarrow\; (x_\varphi')^2 = r'^2\cos^2\varphi - 2r'r\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi$$

$$y_\varphi' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi \;\Rightarrow\; (y_\varphi')^2 = r'^2\sin^2\varphi + 2r'r\cos\varphi\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi.$$

Отсюда получим:

$$(x_\varphi')^2 + (y_\varphi')^2 = (r')^2 + r^2$$

Таким образом,

$$dl = \sqrt{r^2 + (r_\varphi')^2}\,d\varphi,$$

а

$$\frac{dl}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + (r_\varphi')^2}.$$

Если пространственная кривая задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \qquad t \in [\alpha, \beta], \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

то дифференциал длины дуги такой кривой задается формулой

$$dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt$$

или

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2},$$

а производная:

$$l'(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}.$$

§3. Кривизна плоской кривой.

Кривизна кривой есть количественная мера ее искривленности. Пусть на плоскости имеется кривая L. Построим к ней касательные в 2-х точках: A и B. Обозначим длину дуги кривой AB через Δl (рис. 7).

Опр. Угол $\Delta\varphi$, на который поворачивается касательная к кривой L при перемещении из точки A в точку B, называется *углом смежности*.

Опр. *Средней кривизной* кривой L на участке AB называется отношение модуля угла смежности к длине дуги AB:

$$K_{cp}=\frac{|\Delta\varphi|}{\Delta l}.$$

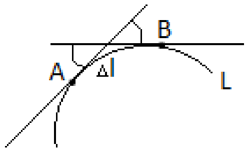


Рис. 7. Кривизна кривой.

Пример. Найдем среднюю кривизну окружности радиусом R. С учетом того, что длина дуги части окружности с углом раствора $\Delta\varphi$ равна $\Delta l = R\Delta\varphi$ ($\Delta\varphi > 0$),

$$K_{cp}=\frac{|\Delta\varphi|}{R|\Delta\varphi|}=\frac{1}{R}.$$

Как и следовало ожидать, кривизна окружности постоянна и обратно-пропорциональна радиусу.

Пример. Поскольку для любого участка прямой $\Delta\varphi$=0, средняя кривизна прямой тоже постоянная и равна нулю: $K_{ср}$=0.

Подобно тому, как средняя скорость позволяет определить мгновенную скорость, $K_{ср}$ позволяет определить кривизну в точке.

Опр. Кривизной кривой в точке A называется предел отношения модуля угла смежности к длине дуги AB при стремлении последней к нулю:

$$K=\lim_{\Delta l\to 0}K_{cp}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{|\Delta\varphi|}{\Delta l}.$$

Другими словами, кривизна кривой определяется формулой:

$$K=\left|\frac{d\varphi}{dl}\right|.$$

Пусть гладкая кривая L задана уравнением $y = f(x)$. Найдем кривизну этой кривой.

Т.к. кривая гладкая, При $\Delta l\to 0$ $\Delta\varphi\to 0$. Дифференциал длины дуги $dl=\sqrt{1+(y')^2}dx$. Тангенс угла наклона касательной $tg\varphi = y'$, поэтому $\varphi = arctg(y')$ и

$$d\varphi=\frac{y''}{1+y'^2}dx.$$

Таким образом,

$$K(x)=\left|\frac{d\varphi}{dl}\right|=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}\right|=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|.$$

Итак, мы получили следующую формулу вычисления кривизны плоской кривой:

$$K(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Пусть теперь кривая задана параметрически:

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}.$$

Тогда

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'},\ y_x''=\frac{y_t''x_t'-y_t'x_t''}{(x_t')^3},$$

откуда

$$K(t)=\frac{|y_t''\cdot x_t'-y_t'\cdot x_t''|}{(x_t')^3\left(1+\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|y_t''\cdot x_t'-y_t'\cdot x_t''|}{(x_t'^2+y_t'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Итак,

$$K=\frac{|y_t''\cdot x_t'-y_t'\cdot x_t''|}{(x_t'^2+y_t'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

§4. Радиус, центр и круг кривизны, эволюта и эвольвента.

Рассмотрим снова гладкую кривую L на плоскости. Выберем произвольную точку M на этой кривой и построим нормаль к кривой в этой точке. Отложим вдоль нормали величину

$$R=\frac{1}{K}$$

в сторону, противоположную направлению выпуклости кривой. В результате получим точку O. Если теперь построить окружность с центром в точке O радиусом R, то кривизна этой окружности будет равна кривизне кривой в точке M (поскольку кривизна окружности равна $K=\frac{1}{R}$), а потому малый участок кривой по обе стороны от точки M можно хорошо приблизить участком окружности (рис. 8).

Опр. Точка O называется *центром кривизны* кривой L, величина $R=\frac{1}{K}$ – *радиусом кривизны*, а круг с центром в точке O радиусом R – *кругом кривизны*.

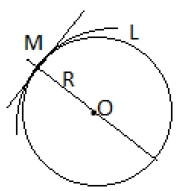


Рис. 8. Радиус, центр и круг кривизны кривой.

Очевидно, каждой точке кривой L отвечает свой центр кривизны.

Опр. Геометрическое место центров кривизны кривой L называется *эволютой* этой кривой, а сама кривая L по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой*.

Пример. В качестве примера, на рис. 9 представлена эволюта параболы $y^2=2px$ ($p>0$).

Свойства эволюты и эвольвенты.

Теорема. Нормаль к эвольвенте является касательной к эволюте.

Теорема. Если на некотором участке кривой M_1M_2 радиус кривизны изменяется монотонно, приращение длины дуги эволюты на этом участке кривой равно (по абсолютной величине) соответствующему приращению радиуса кривизны данной кривой.

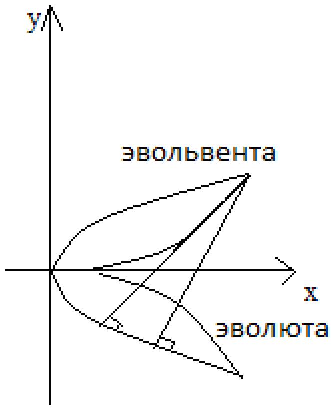


Рис. 9. Эволюта параболы.

Лекция 21

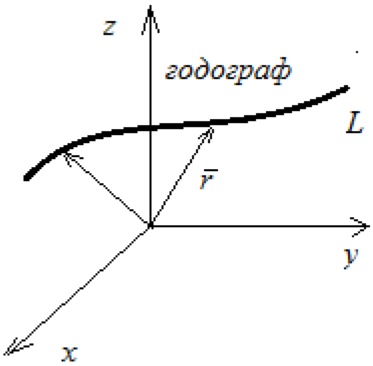
§1. Векторная функция скалярного аргумента.

Рассмотрим вектор в пространстве:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} .$$

Пусть координаты этого вектора являются функциями независимой переменной t:

$$x = f_1(t)\,; \; y = f_2(t)\,; \; z = f_3\left(t\right),$$



тогда и сам вектор меняется с изменением t:

$$\vec{r} = \vec{r}\left(t\right) = x\left(t\right)\vec{i} + y\left(t\right)\vec{j} + z\left(t\right)\vec{k} \qquad (1)$$

Такой вектор $\vec{r}(t)$ называется *векторной функцией скалярного аргумента* t (вектор-функцией). Задание векторной функции $\vec{r}(t)$ эквивалентно заданию трех обычных ($R \to R$) функций: $x(t), y(t), z(t)$.

Рис. 1. Годограф векторной функции.

Векторная функция – однозначное соответствие $R \to R^3$ (значению t ставится в соответствие значение трех переменных
x, y, z). Поместим начало вектора $\vec{r}(t)$ в начало координат, тогда с изменением t конец вектора $\vec{r}$ будет описывать некоторую линию L в пространстве. Эта линия (рис. 1) называется *годографом* векторной функции $\vec{r}(t)$. Уравнение (1) называется *векторным уравнением* кривой L (годографа). Если x, y, z а – координаты материальной точки в пространстве, а t – время, то годограф представляет собой траекторию движения материальной точки, а уравнение (1) – это уравнение движения.

Выделим следующие частные случаи.

1) Если с изменением t меняется только длина вектора $\bar{r}(t)$, а направление не меняется, то годограф – луч исходящий из начала координат (рис. 2).

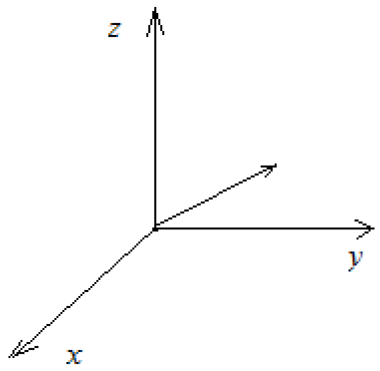


Рис. 2. Годограф вектор-функции постоянного направления.

2) Если от t не зависит длина вектора $\bar{r}$, а зависит только его направление, то годограф - линия на поверхности сферы (рис. 3) с центром в начале координат и радиусом $|\bar{r}|$ (в частности, это может быть окружность).

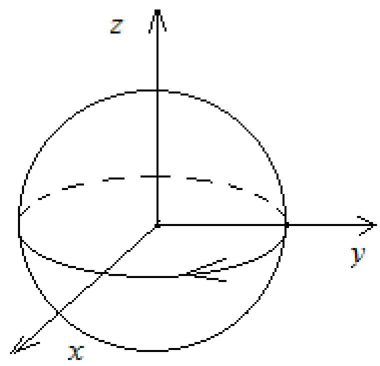


Рис. 3. Годограф вектор-функции постоянной длины.

§2. Предел и непрерывность векторной функции.

Определение предела векторной функции формально аналогично определению предела обычной функции.

Опр. Вектор $\bar{R}$ называется *пределом вектор-функции* $\bar{r}(t)$ при $t \to t_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon): 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\bar{r}(t) - \bar{R}| < \varepsilon$ (или $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon): t \in \dot{U}_\delta(t_0) \Rightarrow |\bar{r}(t) - \bar{R}| < \varepsilon$).

Отличие (от определения обычной функции) состоит в том, что пределом векторной функции является, естественно, вектор и модуль $|\bar{r}(t) - \bar{R}|$, который следует теперь понимать как модуль вектора равен

$$|\bar{r}(t) - \bar{R}| = \sqrt{(x(t) - x_R)^2 + (y(t) - y_R)^2 + (z(t) - z_R)^2},$$

где x_R, y_R, z_R – координаты вектора R. Тем не менее, поскольку по форме определение предела векторной функции ни чем не отличается от определения предела
обычной функции, то для предела векторной функции справедливы основные теоремы о пределе обычной функции. Однако, можно сформулировать и новые теоремы.

Теорема. Вектор $\vec{R} = \{x_R, y_R, z_R\}$ является пределом векторной функции $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ при $t \to t_0$ в том и только том случае, если:

$$x_R = \lim_{t \to t_0} x(t)$$
$$y_R = \lim_{t \to t_0} y(t)$$
$$z_R = \lim_{t \to t_0} z(t).$$

Доказательство.

1) Покажем, что

$\{\vec{R} = \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t)\} \Rightarrow \{x_R = \lim_{t \to t_0} x(t),\ y_R = \lim_{t \to t_0} y(t), z_R = \lim_{t \to t_0} z(t)\}$.

Действительно, т.к. $\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{R}$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : t \in \dot{U}_\delta(t_0) \Rightarrow \left|\vec{r}(t) - \vec{R}\right| < \varepsilon,$$

т.е.

$$\sqrt{(x(t) - x_R)^2 + (y(t) - y_R)^2 + (z(t) - z_R)^2} < \varepsilon \text{.}$$

Но

$$\left|x(t) - x_R\right| \le \sqrt{\left(x(t) - x_R\right)^2 + \left(y(t) - y_R\right)^2 + \left(z(t) - z_R\right)^2} \Rightarrow$$
$$\left|x(t) - x_R\right| < \varepsilon.$$

Аналогично,

$$\left|y(t) - y_R\right| < \varepsilon$$

и

$$\left|z(t) - z_R\right| < \varepsilon$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : t \in \dot{U}_\delta(t_0) \Rightarrow \begin{cases} |x(t) - x_R| < \varepsilon \\ |y(t) - y_R| < \varepsilon \\ |z(t) - z_R| < \varepsilon \end{cases},$$

Но последнее и означает, что $x_R = \lim_{t \to t_0} x(t)$ **,** $y_R = \lim_{t \to t_0} y(t)$**,** $z_R = \lim_{t \to t_0} z(t)$.

2) Покажем теперь, что

$\{x_R = \lim_{t \to t_0} x(t)$**,** $y_R = \lim_{t \to t_0} y(t)$**,** $z_R = \lim_{t \to t_0} z(t)\} \Rightarrow \{\vec{R} = \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t)\}$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначим через γ величину $\gamma = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$.

$$\left\{x_R = \lim_{t \to t_0} x(t)\right\} \Rightarrow \left\{\exists \delta_1(\varepsilon) : t \in \dot{U}_{\delta_1}(t_0) \Rightarrow \left|x_R - x(t)\right| < \gamma\right\}$$
$$\left\{y_R = \lim_{t \to t_0} y(t)\right\} \Rightarrow \left\{\exists \delta_2(\varepsilon) : t \in \dot{U}_{\delta_2}(t_0) \Rightarrow \left|y_R - y(t)\right| < \gamma\right\}$$
$$\left\{z_R = \lim_{t \to t_0} z(t)\right\} \Rightarrow \left\{\exists \delta_3(\varepsilon) : t \in \dot{U}_{\delta_3}(t_0) \Rightarrow \left|z_R - z(t)\right| < \gamma\right\}.$$

Выберем в качестве δ наименьшее из чисел $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Тогда внутри $\dot{U}_\delta(t_0)$ будут справедливы все три неравенства:

$$\begin{cases} |x_R - x(t)| < \gamma \\ |y_R - y(t)| < \gamma \\ |z_R - z(t)| < \gamma \end{cases}.$$

Из последнего следует, что

$$\left|\vec{r}(t) - \vec{R}\right| \le \sqrt{\left(x(t) - x_R\right)^2 + \left(y(t) - y_R\right)^2 + \left(z(t) - z_R\right)^2} < \sqrt{3\gamma^2} = \varepsilon .$$

Итак, для произвольно выбранного числа $\varepsilon > 0$ мы нашли такое, $\delta(\varepsilon)$ что при $x \in \dot{U}_\delta(t_0)$ справедливо неравенство $\left|\vec{r}(t) - \vec{R}\right| < \varepsilon$, что и означает, что

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{R} .$$

Теорема доказана.

Опр. Векторная функции $\vec{r}(t)$ называется *непрерывной* в точке t_0, если существует предел $\vec{r}(t)$ при $t \to t_0$ и он равен

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

Очевидно, определение непрерывности вектор-функции также формально не отличается от определения непрерывности обычной функции. Переформулируем это определение в терминах приращений.

Пусть $t = t_0$, $\vec{r}(t_0) = x(t_0)\vec{i} + y(t_0)\vec{j} + z(t_0)\vec{k}$.

Придадим аргументу t приращение Δt.

$$\vec{r}(t + \Delta t) = x(t_0 + \Delta t)\vec{i} + y(t_0 + \Delta t)\vec{j} + z(t_0 + \Delta t)\vec{k}.$$

Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ называется *приращением вектор-функции* $\vec{r}(t)$ в точке t_0, отвечающим приращению Δt независимой переменной t (рис. 4).

Очевидно, что

$$\Delta\vec{r} = (x(t + t_0) - x(t_0))\vec{i} + (y(t + t_0) - y(t_0))\vec{j} + (z(t + t_0) - z(t_0))\vec{k},$$

т.е.

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}. \qquad (2)$$

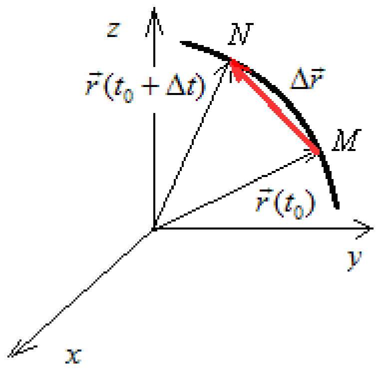


Рис. 4. Приращение вектор-функции.

Опр. Векторная функция $\vec{r}(t)$ называется *непрерывной* в точке $t = t_0$, если бесконечно малому приращению аргумента t в этой точке отвечает бесконечно малое приращение функции $\vec{r}(t)$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta \vec{r} = 0.$$

§3. Производная векторной функции.

Опр. Производной векторной функции $\vec{r}(t)$ называется предел отношения приращения вектор-функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю:

$$r'(t) = \frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Из формулы (2) и определения производной вектор-функции очевидно, что

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

Выясним *геометрический смысл производной* векторной функции. Пусть начало вектора $\vec{r}(t)$ находится в начале координат. При $t = t_0$ конец вектора $\vec{r}$ находится в точке M, а при $t = t_0 + \Delta t$ – в точке N. Приращение $\Delta \vec{r}$, отвечающее изменению Δt, $\Delta \vec{r} = \overline{MN}$ (рис. 4).
Поэтому

$$\frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t} \parallel \overline{MN}, \quad \text{причем} \begin{cases} \dfrac{\overline{\Delta r}}{\Delta t} \uparrow\uparrow \overline{MN} \;\; \textit{при} \;\; \Delta t > 0 \;\; (t - \textit{возрастает}) \\ \dfrac{\overline{\Delta r}}{\Delta t} \uparrow\downarrow \overline{MN} \;\; \textit{при} \;\; \Delta t < 0 \;\; (t - \textit{убывает}). \end{cases}$$

Иными словами, вектор $\dfrac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}$ параллелен вектору $\overline{MN}$ и направлен в сторону возрастания переменной t.

Рассмотрим годограф вектор-функции $\vec{r}(t)$**.** Очевидно, что отрезок MN есть хорда годографа, а прямая, являющаяся продолжением этого отрезка – секущей годографа. При стремлении $\Delta t \to 0$ точка N перемещается по годографу, стремясь к точке M. Поскольку предельное положение секущей кривой – есть касательная к этой кривой, то вектор

$$\vec{r}\,' = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

направлен вдоль касательной к годографу векторной функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 в сторону возрастания переменной t. Наконец, найдем модуль вектора $\vec{r}\,'$:

$$|\vec{r}\,'(t_0)| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta l}{\Delta t}\right| = \frac{dl}{dt},$$

где dl – дифференциал длины дуги кривой L. Здесь мы воспользовались тем, что $|\Delta \bar{r}| = \Delta s = |\overline{MN}|$, $\Delta l \sim \Delta s$ при $\Delta s \to 0$, а при $\Delta t \to 0$, очевидно, $\Delta s \to 0$.

Итак, *производная векторной функции* $\vec{r}(t)$ – *есть вектор, направленный по касательной к годографу этой функции в направлении роста независимой переменной* t. *Длина этого вектора равна производной длины дуги в точке* t_0.

Выясним теперь *механический смысл производной* векторной функции.

Рассмотрим частицу (материальную точку), движущуюся в пространстве произвольным образом по некоторой траектории (рис. 5). Пусть $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор частицы в текущий момент времени t. Тогда, как уже говорилось выше, годограф – это траектория (путь) движения частицы.

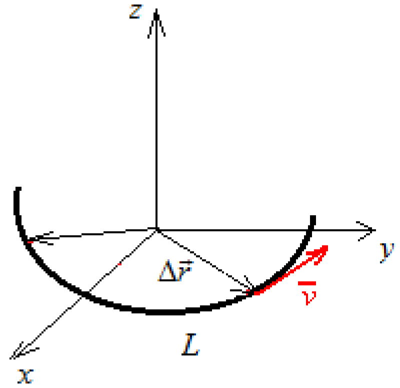


Рис. 5. Движение частицы в пространстве.

Опр. *Средней скоростью* частицы за промежуток времени $(t_0, t_0 + \Delta t)$ называется вектор

$$\bar{v}_{cp} = \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t} .$$

Опр. Мгновенной *скоростью движения частицы* в момент времени t_0 называется предел средней скорости за промежуток Δt при $\Delta t \to 0$, т.е. вектор

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t} = \vec{r}\,'.$$

§4. Уравнение касательной к пространственной кривой.

Пусть пространственная кривая L задана уравнением:

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка, лежащая на этой кривой, и соответствующая значению $t = t_0$: $x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ z_0 = z(t_0)$. Поскольку вектор $\bar{r}'(t_0) = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ направлен по касательной к годографу вектор-функции $\bar{r}(t)$, он является направляющим вектором касательной к кривой L. Поэтому уравнение касательной к кривой L в точке M имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

§5. Правила дифференцирования векторной функции.

Справедливы следующие формулы дифференцирования векторной функции.

1) $\left(\overline{r_1}(t)+\vec{r}_2(t)\right)' = \vec{r}_1' + \vec{r}_2'$, при условии, что две последние производные существуют.

2) $(c\vec{r}\left(t\right))' = c\vec{r}\,'$, где c – постоянная.

3) $\left[f\left(t\right)\vec{r}(t)\right]' = f'\left(t\right)\vec{r}\left(t\right)+f(t)\vec{r}\,'(t)$, где $f(t)$ – обычная функция ($R \to R$). Подразумевается существование производных $f\,'(t)$ и $\vec{r}\,'(t)$.

4) $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' \cdot \vec{r}_2 + \overline{r_1} \cdot \vec{r}_2'$, где точка обозначает скалярное произведение двух вектор-функций. Подразумевается существование производных $\vec{r}_1'$ и $\vec{r}_2'$.

5) $\overline{(r_1} \times \vec{r}_2)' = \overline{r_1}' \times \vec{r}_2 + \overline{r_1} \times \vec{r}_2'$, где крестик обозначает векторное произведение двух вектор-функций. Подразумевается существование производных $\vec{r}_1'$ и $\vec{r}_2'$.

§6. Теорема о производной вектор-функции постоянной длины.

Пусть $\vec{r}\left(t\right)$ - вектор функция, причем Причем $\left|\vec{r}\left(t\right)\right| = const$ т.е. от t зависит только название вектора $\vec{r}$. В этом случае будем называть вектор-функцию $\vec{r}\left(t\right)$ *вектор-функцией постоянной длины.*

Теорема. Производная вектор-функции постоянной длины длины $\vec{r}(t)$– есть вектор, перпендикулярный к самому вектору $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r} \cdot \vec{r}\,' = 0.$$

Доказательство. Производная скалярного квадрата вектора $\bar{r}$, очевидно, равна:

$$(\vec{r} \cdot \vec{r})' = \vec{r}\,' \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{r}\,' = 2\vec{r} \cdot \vec{r}\,'.$$

С другой стороны, та же производная равна:

$$\left(\vec{r} \cdot \vec{r}\right)' = \left(\left|\vec{r}\right|^2\right)' = 0,$$

поскольку

$$\left|\vec{r}\left(t\right)\right| = const.$$

Таким образом,

$$\vec{r} \cdot \vec{r}\,' = 0.$$

Теорема доказана.

Физический смысл этой теоремы состоит в том, что тангенциальная скорость частицы, движущейся по поверхности сферы (в частности – по окружности), перпендикулярна радиус-вектору частицы.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что касательная прямая к сфере (окружности) в точке касания перпендикулярна радиус-вектору этой точки.